

UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/actamathematica36upps>

ACTA
MATHEMATICA

THE
CONTAMINATED

cc
11/1/20

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

JOURNAL

HERAUSGEGEBEN

RÉDIGÉ

VON

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

36



BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1913

PARIS
A. HERMANN ET FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

128953
30/7/13



ALMA MATER

QA
1
A2575
v. 36

15/10/1913
220/251

UPPSALA 1913
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. BÄCKLUND, Lund.
I. FREDHOLM, Stockholm.
H. VON KOCH, »
A. LINDSTEDT, »
G. MITTAG-LEFFLER, »
E. PHRAGMÉN, »
A. WIMAN, Uppsala.

NORGE:

ELLING HOLST, Christiania.
C. STÖRMER, »
L. SYLOW, »

DAN MARK:

J. L. W. V. JENSEN, Kjöbenhavn.
H. G. ZEUTHEN, »

FINLAND:

ERNST LINDELÖF, Helsingfors.
HJ. MELLIN, »

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

BAND 36. — 1912—1913. — TOME 36.

	Seite. Pages
BOHR, HARALD, Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen	197—240
FABRY, EUGÈNE, Ordre des points singuliers de la série de Taylor..	69—104
GALBRUN, H., Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable . . .	1— 68
JENSEN, J. L. W. V., Recherches sur la théorie des équations	181—195
LICHTENSTEIN, LEON, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken	345—386
LIPSCHITZ, R., Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraire d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de minima (Traduit du latin par Paul Montel)	281—295
MALMQUIST, J., Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre	297—343
PINCHERLE, S., Quelques remarques sur les fonctions déterminantes . .	269—280
SUNDMAN, KARL F., Mémoire sur le problème des trois corps	105—179
ZORETTI, L., Contribution à l'étude des lignes cantoriennes	241—268

SUR LA REPRÉSENTATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

PAR

H. GALBRUN

À PARIS.

Les solutions de l'équation différentielle linéaire:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0,$$

où les coefficients P sont des polynomes en x , sont irrégulières au voisinage du point à l'infini quand le degré des polynomes P dans la suite:

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n,$$

ne va pas constamment en décroissant. M. POINCARÉ¹ a établi qu'elles pouvaient alors être représentées asymptotiquement par des séries en général divergentes de la forme:

$$S = e^Q x^a \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots \right],$$

où Q est un polynome entier en x ; autrement dit, si l'on désigne par y une de ces solutions, le point x s'éloignant à l'infini dans une direction déterminée, on peut en général former une série S telle que l'on ait, n étant un nombre entier positif choisi arbitrairement:

$$y = e^Q x^a \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

¹ Acta Mathematica, Tome 8, 1886: Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.

ε tendant vers 0. Cette égalité n'est d'ailleurs vérifiée que dans un certain angle et les différentes séries S se permutent entre elles pour représenter une même fonction y quand on fait varier l'argument avec lequel x devient infini; le plan est ainsi divisé par des rayons issus de l'origine en plusieurs régions dans chacune desquelles la fonction y est représentée asymptotiquement par une série différente.

De même la fonction $\Gamma(x)$, solution de l'équation aux différences finies linéaire

$$f(x+1) - xf(x) = 0$$

est représentée asymptotiquement par une série déduite de la série de STIRLING; cette dernière s'écrit:

$$L\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) Lx - x + \frac{1}{2} L2\pi + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}} + \dots$$

et l'on montre que si S_n désigne la somme des premiers termes jusque et y compris celui qui contient $\frac{1}{x^{2n+1}}$ en facteur, l'expression

$$x^{2n+1} [L\Gamma(x) - S_n],$$

tend vers 0 quand x s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre $-x + \nu$ et $x - \nu$, ν étant un nombre positif aussi petit que l'on veut; on peut donc former une série divergente telle que l'on ait:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left[1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{t}{x^n} \right],$$

ε tendant vers 0, quand x s'éloigne à l'infini avec un argument appartenant au même intervalle.

Il a dès lors paru intéressant d'entreprendre sur les équations aux différences finies linéaires, dont les coefficients sont des polynomes, une étude analogue à celle qui fut faite sur les équations différentielles du même genre et de chercher à former des séries représentant asymptotiquement leurs solutions au voisinage de l'infini. Tel est l'objet de ce travail qui fera ressortir une nouvelle fois les analogies déjà souvent signalées entre les deux catégories d'équations.

On sait que la recherche des solutions de l'équation aux différences finies:

$$1) \quad A_0 f(x+r) + A_1 f(x+r-1) + \dots + A_r f(x) = 0,$$

où A_0, A_1, \dots, A_r sont des polynômes en x , se ramène au moyen de la transformation

$$2) \quad f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} y^{x-1} \varphi(y) dy,$$

à l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$3) \quad y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi = 0,$$

dont les coefficients B sont des polynômes en y . Les solutions de l'équation 3) admettent pour points singuliers les racines du polynôme B_0 , l'origine et le point à l'infini.

Je considère un contour L contenant à son intérieur un des points α , racines du polynôme B_0 et laissant à son extérieur tous les autres points singuliers des solutions de l'équation différentielle 3) et un contour L_0 qui laisse à son extérieur tous les points singuliers de ces mêmes solutions sauf l'origine; Je forme des solutions $f(x)$ de l'équation aux différences finies définies par l'égalité

$$f(x) = \int_L y^{x-1} \varphi(y) dy - \int_{L_0} y^{x-1} (k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_q v_q) dy.$$

La fonction $\varphi(y)$ est une solution de 3) admettant le point α pour point singulier; les fonctions v forment un système de solutions indépendantes de cette même équation et les coefficients k sont des fonctions de x convenablement choisies. Ces solutions $f(x)$ de l'équation aux différences finies sont des fonctions méromorphes de x , définies dans tout le plan et dont je détermine les pôles avec leur ordre de multiplicité.

Dans le cas où les solutions de 3) sont régulières en α , on peut ainsi former au moyen des contours L et L_0 autant de solutions de l'équation 1) que l'équation déterminante relative à ce point admet de racines en général non entières, en prenant pour $\varphi(y)$ les solutions de 3) correspondantes obtenues par la méthode de M. FUCHS. C'est dans cette hypothèse que j'ai formé les développements asymptotiques des solutions $f(x)$.

Supposant que le point x s'éloigne à l'infini en restant constamment à droite de l'axe des ordonnées, je forme des séries asymptotiques de la forme

$$\alpha^x \left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \dots \right],$$

avec

$$C_0 = (-1)^q y^{x+q-1} B_0,$$

$$C_1 = (-1)^{q-1} y^{x+q-2} B_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_{q-1} = -y^x B_{q-1}.$$

Si l'on choisit pour $\varphi(y)$ une solution de l'équation différentielle linéaire

$$3) \quad y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi = 0,$$

on a donc

$$F[f(x)] = M[\varphi(\beta)] - M[\varphi(\alpha)].$$

Les points singuliers des solutions de l'équation 3) sont l'origine, le point à l'infini et les points α racines du polynome B_0 .

Si l'équation fondamentale relative à l'origine admet les q racines simples

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q,$$

on peut former q solutions indépendantes de l'équation 3),

$$v_1, v_2, \dots, v_q,$$

qui, par une rotation dans le sens directe autour de l'origine le long d'un contour laissant tous les points α à son extérieur, deviennent:

$$\bar{v}_1 = \omega_1 v_1,$$

$$\bar{v}_2 = \omega_2 v_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\bar{v}_q = \omega_q v_q.$$

Si l'équation fondamentale admet des racines multiples, on peut former q solutions indépendantes v_1, v_2, \dots, v_q qui se répartissent en autant de groupes, qu'il y a de racines distinctes et les l solutions v_1, v_2, \dots, v_l du groupe correspondant à la racine ω_l d'ordre de multiplicité l deviennent par une rotation autour de l'origine

Par une rotation autour de l'origine la quantité

$$\frac{d^m y^{x+k}}{dy^m} \frac{d^n V_j}{dy^n},$$

où k est entier, devient

$$e^{2i\pi x} \frac{d^m y^{x+k}}{dy^m} \frac{d^n \bar{V}_j}{dy^n},$$

et l'on a

$$M[\bar{V}_j(y)] - M[V_j(y)] = M[v_j(y)].$$

Soit L_0 un contour fermé partant d'un point a du plan pour y revenir, comprenant à son intérieur l'origine et laissant à son extérieur les points α ; en posant

$$I_{L_0} = \int_{L_0} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

c_1, c_2, \dots, c_q étant des constantes par rapport aux deux variables x et y , on a

$$F[I_{L_0}] = M[c_1 v_1(a) + c_2 v_2(a) + \dots + c_q v_q(a)].$$

Soit un contour L partant du même point a pour y revenir et comprenant à son intérieur un ou plusieurs points α , mais laissant à son extérieur l'origine; une solution $\varphi(y)$ de l'équation différentielle devient $\bar{\varphi}(y)$ par une rotation de la variable le long de ce contour; en posant

$$I_L = \int_L y^{x-1} \varphi(y) dy,$$

on a la relation

$$F[I_L] = M[\bar{\varphi}(a) - \varphi(a)].$$

Mais la fonction

$$u = \bar{\varphi}(y) - \varphi(y),$$

est solution de l'équation différentielle; au voisinage du point a , elle s'exprime linéairement en fonction de v_1, v_2, \dots, v_q ; les constantes c peuvent être choisies de telle sorte qu'au voisinage de a la relation

$$5) \quad u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q$$

soit identiquement satisfaite; il en résulte que

$$F[I_L] = F[I_{L_0}] = 0,$$

c'est à dire que la fonction

$$f(x) = I_L - I_{L_0}$$

est une solution de l'équation aux différences finies; la valeur de cette fonction, d'après la méthode même qui a servi à la former, est indépendante de la position du point a et de la forme des contours L et L_0 , pourvu que dans leurs déformations, ces derniers ne traversent jamais aucun point singulier des solutions de l'équation différentielle.

Dans ce qui suivra, je prendrai pour contour L , un contour L_j ne comprenant à son intérieur qu'un seul point α , le point α_j par exemple; de plus je supposerai qu'au voisinage du point α_j les solutions de l'équation différentielle 3) sont toutes régulières.

Cette dernière condition est remplie, si α_j est une racine simple du polynôme B_0 ; les racines de l'équation déterminante relative à ce point sont alors

$$0, 1, 2, \dots, q-2, \lambda_j,$$

et l'on choisit pour φ la solution φ_j , correspondant à la racine en général non entière λ_j , qui s'écrit

$$6) \quad \varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} \psi_j(y),$$

la fonction ψ_j étant holomorphe en α_j .

A chaque racine simple du polynôme B_0 correspond ainsi une solution $f_j(x)$ de l'équation aux différences finies

$$7) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \int_{L_0} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

les constantes c étant les coefficients des fonctions v dans le second membre de la relation 5), qui devient ici

$$5') \quad (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \varphi_j(y) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q.$$

Passons aux cas particuliers. Nous supposerons d'abord que λ_j est entier positif ou négatif et que la fonction $\varphi_j(y)$ contient un logarithme

$$8) \quad \varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [\psi_{j,1} + \psi_{j,2} L(y - \alpha_j)];$$

les fonctions ψ sont holomorphes en α_j ; la fonction $f_j(x)$ est toujours définie par la relation 7) dans laquelle c_1, c_2, \dots, c_q sont déterminés de façon que l'égalité 5) soit satisfaite.

Si λ_j est entier négatif et si $q_j(y)$ ne contient pas de logarithme, le point α_j est un pôle d'ordre k de la fonction $q_j(y)$

$$\lambda_j = -k.$$

On en conclut que $F[I_{L_j}]$ est nul et la fonction $f_j(x)$ est définie par la formule:

$$9) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy.$$

Mais au voisinage de α_j , la fonction $\psi_j(y)$ se développe en série entière:

$$\psi_j(y) = a_0 + a_1(y - \alpha_j) + \dots + a_n(y - \alpha_j)^n + \dots$$

Il en est de même de la fonction y^{x-1} ,

$$y^{x-1} = \alpha_j^{x-1} \left[1 + \frac{y - \alpha_j}{\alpha_j} \right]^{x-1} = \alpha_j^{x-1} \left[1 + \frac{(x-1)(y - \alpha_j)}{\alpha_j} + \frac{(x-1)(x-2)(y - \alpha_j)^2}{2! \alpha_j^2} + \dots \right],$$

et l'intégrale définissant $f_j(x)$ est égale au résidu

$$f_j(x) = 2\pi i \alpha_j^{x-1} \left[a_0 \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)}{(k-1)! \alpha_j^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{(x-1)(x-2) \dots (x-k+2)}{(k-2)! \alpha_j^{k-2}} + \dots + a_{k-1} \right].$$

La fonction $f_j(x)$ est le produit de l'exponentielle α_j^{x-1} par un polynôme de degré $k-1$.

Si λ_j est entier positif et si $q_j(y)$ ne contient pas de logarithme, l'intégrale I_{L_j} est nulle; l'expression de $f_j(x)$ est illusoire; mais on sait que λ_j est alors supérieur à $q-1$; il en résulte que

$$M[q_j(\alpha_j)] = 0.$$

On remplace alors le contour L_j par un contour partant du point a pour aboutir en α_j ; la fonction $f_j(x)$ est alors définie par la formule

$$12) \quad g_j(v) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy = \int_{L_\infty} y^{x-1} [c_1 W_1 + c_2 W_2 + \dots + c_q W_q] dy,$$

et l'égalité

$$13) \quad u = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_q w_q.$$

Sur les deux contours L_0 et L_∞ on aurait pu prendre les intégrales en sens inverse, au lieu de les prendre en sens direct; aux fonctions v et w l'on substituerait alors des fonctions v' et w' devenant par une rotation en sens inverse \bar{v}' et \bar{w}' qui satisfont à des relations analogues à celle du système I; dans les équations II déterminant les constantes γ , il faudrait remplacer $e^{2i\pi x}$ par $e^{-2i\pi x}$; on verra d'ailleurs plus loin, que les fonctions ainsi formées ne sont pas distinctes de celles que l'on a obtenues en prenant les intégrales en sens direct.

En résumé la méthode fait correspondre à chaque racine d'ordre de multiplicité p , non nulle du polynôme B_0 , au voisinage de laquelle les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières, p solutions f et p solutions g de l'équation aux différences finies. Si les solutions de l'équation 3) sont régulières au voisinage de toutes les racines non nulles du polynôme B_0 , le nombre des solutions de chaque groupe f et g est égal à celui de ces racines. Le polynôme B_0 est en général de degré r et n'admet pas de racines nulles; dans ces conditions le nombre des solutions de chaque groupe f et g est égal à l'ordre r de l'équation aux différences finies; si le polynôme B_0 est de degré inférieur à r , où s'il admet des racines nulles, le nombre des solutions de chaque groupe est inférieur à r .

II. Quelques propriétés des fonctions f et g solutions de l'équation aux différences finies.

Supposons d'abord que l'équation fondamentale relative à l'origine n'admette que des racines simples $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots, \omega_q$; d'après les résultats du chapitre précédent on a:

$$V_l = \frac{v_l}{\omega_l e^{2i\pi x}} - 1$$

et la formule 7) définissant $f_j(x)$ s'écrit:

$$14) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \left[\frac{c_1}{\omega_1 e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_1(y) dy + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{c_l}{\omega_l e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_l(y) dy + \dots + \frac{c_q}{\omega_q e^{2i\pi x} - 1} \int_{L_0} y^{x-1} v_q(y) dy \right].$$

Or toute intégrale de la forme

$$\int_L y^{x-1} \chi(y) dy$$

prise le long d'un contour L situé entièrement à distance finie, ne passant pas par l'origine et sur lequel $\chi(y)$ reste fini, est une fonction holomorphe de x dans tout le plan.

Les seules singularités de la fonction $f_j(x)$ ne peuvent donc être que des pôles simples, racines des dénominateurs

$$\omega_l e^{2i\pi x} - 1 = 0.$$

En posant

$$\omega_l = e^{2i\pi \beta_l}$$

ces points racines sont donnés par les formules

$$15) \quad \begin{aligned} x &= -\beta_1 + m, \\ x &= -\beta_2 + m, \\ &\dots \dots \dots \\ x &= -\beta_l + m, \\ &\dots \dots \dots \\ x &= -\beta_q + m, \end{aligned}$$

où m est entier positif, négatif ou nul.

Comme les racines de l'équation fondamentale sont toutes distinctes on a

$$v_l = y^{\beta_l} \psi_l(y);$$

la fonction ψ_l est uniforme au voisinage de l'origine; elle peut se mettre sous la forme, soit d'une somme de deux séries dont l'une est ordonnée par rapport aux puissances croissantes et l'autre par rapport aux puissances décroissantes de la variable, si la solution v_l est irrégulière, soit d'une seule série ordonnée par rap-

port aux puissances croissantes, si cette solution est régulière; dans ce dernier cas en prenant pour β_l la racine de l'équation déterminante relative à l'origine la série ψ_l ne contient que des puissances positives de y et commence par un terme constant non nul.

Le terme indépendant de x dans le développement de la fonction

$$\int_L y^{x-1+\beta_l} \psi_l(y) dy$$

au voisinage du point $-\beta_l + m$, suivant les puissances croissantes de $x + \beta_l - m$, est

$$\int_L y^{m-1} \psi_l(y) dy.$$

Si la fonction v_l est irrégulière à l'origine, cette intégrale n'est pas nulle en général quand m est entier positif, négatif ou nul. Si la fonction v_l est régulière à l'origine, l'intégrale est nulle pour les valeurs de m entières positives; elle est différente de 0, quand m est entier, négatif ou nul. Dans le premier cas la fonction $f_j(x)$ admet pour pôles tous les points

$$x = -\beta_l + m.$$

Dans le second elle n'admet pour pôles que les points donnés par cette formule pour m entier négatif ou nul.

Examinons le cas où l'équation fondamentale relative à l'origine admet des racines multiples; les fonctions v appartenant au groupe correspondant à la racine ω_1 d'ordre de multiplicité l satisfont aux relations I du chapitre précédent; la fonction V_j est définie par la formule

$$V_j = \gamma_{j,1} v_1 + \gamma_{j,2} v_2 + \dots + \gamma_{j,j} v_j,$$

les coefficients γ étant des fonctions de x , solutions du système II. Dans ce cas encore les seuls singularités de la fonction $f_j(x)$ ne peuvent être que des pôles racines des équations

$$\omega_1 e^{2i\pi x} - 1 = 0$$

où ω_1 est une racine de l'équation fondamentale. Pour vérifier si toutes ces racines sont bien des pôles de $f_j(x)$, je vais établir une expression nouvelle des fonctions V .

Les fonctions v peuvent se mettre sous la forme:

Or on a évidemment

$$V_1 = \frac{v_1}{\omega_1 \mu - 1},$$

d'où

$$y^{x-1} V_1 = K \psi_{1,1},$$

en posant

$$K = \frac{y^{x-1}}{\omega_1 \mu - 1}.$$

De même on a :

$$V_2 = \frac{1}{\omega_1 \mu - 1} \left[v_2 - \frac{\mu \omega_{2,1}}{\omega_1 \mu - 1} v_1 \right],$$

d'où

$$V_2 = \frac{-\mu \omega_{2,1}}{(\omega_1 \mu - 1)^2} \psi_{1,1} + \frac{\psi_{2,1}}{\omega_1 \mu - 1} + \frac{\psi_{2,2} Ly}{\omega_1 \mu - 1}.$$

En vertu de la relation

$$\omega_{2,1} \psi_{1,1} = 2 i \pi \omega_1 \psi_{2,2},$$

cette égalité peut s'écrire

$$y^{x-1} V_2 = \frac{\psi_{2,1} y^{x-1}}{\omega_1 \mu - 1} + \psi_{2,2} \left[\frac{y^{x-1} Ly}{\omega_1 \mu - 1} - \frac{2 i \pi \omega_1 \mu y^{x-1}}{(\omega_1 \mu - 1)^2} \right],$$

ou

$$y^{x-1} V_2 = \psi_{2,1} K + \psi_{2,2} \frac{dK}{dx}.$$

D'une façon générale, je dis que l'on a

$$16) \quad y^{x-1} V_j = \psi_{j,1} K + \psi_{j,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1} K}{dx^{j-1}}.$$

Cette égalité étant vraie pour V_1 et V_2 , j'admets qu'elle est vérifiée pour V_3, \dots, V_{j-1} et je démontre qu'elle est encore vraie pour V_j . En se reportant au système II', on voit que l'on a les relations de récurrence V:

$$V \quad \begin{cases} \gamma'_{j,j} = 1, \\ \gamma'_{j,j-1} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-1}, \\ \gamma'_{j,j-2} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-2} - \omega'_{j,j-2} \gamma'_{j-2,j-2}, \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-g} = -\omega'_{j,j-1} \gamma'_{j-1,j-g} - \omega'_{j,j-2} \gamma'_{j-2,j-g} - \dots - \omega'_{j,j-l} \gamma'_{j-g,j-g}. \end{cases}$$

La relation 16) s'écrit,

$$16') \quad \frac{y^{x-1}}{\omega_1 u - 1} [\gamma'_{j,1} v_1 + \gamma'_{j,2} v_2 + \dots + \gamma'_{j,j} v_j] = \psi_{j,1} K + \psi_{j,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1}K}{dx^{j-1}}.$$

Si l'on remplace dans le premier membre les fonctions v par leurs valeurs tirées de III et si l'on égale ensuite les coefficients des mêmes puissances de Ly dans les deux membres de 16'), il vient en désignant par M la quantité $\frac{1}{\omega_1 u - 1}$,

$$VI \quad \begin{cases} \gamma'_{j,1} \psi_{1,1} + \gamma'_{j,2} \psi_{2,1} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,1} = (\omega_1 u - 1) \left[\psi_{j,2} \frac{dM}{dx} + \dots + \psi_{j,j} \frac{d^{j-1}M}{dx^{j-1}} \right], \\ \gamma'_{j,2} \psi_{2,2} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,2} = (\omega_1 u - 1) \left[C_{j-1}^1 \psi_{j,3} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^{j-2} \psi_{j,j} \frac{d^{j-2}M}{dx^{j-2}} \right], \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \dots + \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,j-g} = \\ = (\omega_1 u - 1) \left[C_{j-g}^{j-g-1} \psi_{j,j-g+1} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^{j-g-1} \psi_{j,j} \frac{d^{j-g}M}{dx^{j-g}} \right], \\ \dots \\ \gamma'_{j,j-1} \psi_{j-1,j-1} = C_{j-1}^{j-2} (\omega_1 u - 1) \psi_{j,j} \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Il s'agit de démontrer que ces relations sont bien vérifiées; prenons celle d'entre elles dont le premier terme est $\gamma'_{j,j-g} \psi_{j-g,j-g}$ et remplaçons y les lettres γ' par leurs valeurs tirées de V; on a

$$17) \quad \begin{cases} \omega'_{j,j-1} [\gamma'_{j-1,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-1,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g} + \dots + \gamma'_{j-1,j-1} \psi_{j-1,j-g}] \\ + \omega'_{j,j-2} [\gamma'_{j-2,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-2,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g} + \dots + \gamma'_{j-2,j-2} \psi_{j-2,j-g}] \\ + \dots \\ + \omega'_{j,j-g+1} [\gamma'_{j-g+1,j-g} \psi_{j-g,j-g} + \gamma'_{j-g+1,j-g+1} \psi_{j-g+1,j-g}] \\ + \omega'_{j,j-g} \gamma'_{j-g,j-g} \psi_{j-g,j-g} \\ + (\omega_1 u - 1) \left[C_{j-g}^{j-g-1} \psi_{j,j-g+1} \frac{dM}{dx} + \dots + C_{j-1}^{j-g-1} \psi_{j,j} \frac{d^{j-g}M}{dx^{j-g}} \right] = 0. \end{cases}$$

$$20) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy - \sum_{L_0} c_l \int \left[\psi_{l,1} K + \psi_{l,2} \frac{dK}{dx} + \dots + \psi_{l,l} \frac{d^{l-1}K}{dx^{l-1}} \right] dy.$$

En se reportant à ce qui a été dit plus haut sur l'intégrale $\int_{L_0} y^{x-1} \psi(y) dy$ et en remarquant que tout pôle simple de l'intégrale

$$\int_{L_0} K \psi(y) dy$$

devient un pôle d'ordre $l-1$ dans sa dérivée d'ordre $l-1$ par rapport à x , on voit que, lorsque les fonctions v_1, v_2, \dots, v_q sont irrégulières au voisinage de l'origine, la fonction $f_j(x)$ admet en général tous les points racines du dénominateur $\omega_1 e^{2i\pi x} - 1$ comme pôles d'ordre $l-1$, puissance la plus élevée du logarithme, figurant dans le groupe de solutions v , correspondant à la racine ω_1 de l'équation fondamentale.

Supposons que les fonctions v soient régulières au voisinage de l'origine et soit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ les racines de l'équation déterminante relative à l'origine, correspondant à la racine ω_1 de l'équation fondamentale; on a

$$\psi_{j,g} = y^{\beta_j} \chi_{j,g}$$

la fonction $\chi_{j,g}$ étant holomorphe à l'origine; si le premier terme de son développement est de degré n , les seules pôles de l'intégrale

$$\int K \psi_{j,g} dy$$

sont les points

$$x = \beta_j - n + m,$$

où m est entier négatif ou nul; ces points sont des pôles d'ordre $g-1$ dans la dérivée d'ordre $g-1$ par rapport à x ; on peut ainsi déterminer leur ordre de multiplicité; à partir d'une valeur de m de module suffisamment grand les pôles correspondant à la racine ω_1 sont manifestement d'ordre $l-1$, puissance la plus élevée du logarithme dans le groupe de fonctions v correspondant à cette même racine.

En résumé les fonctions $f_j(x)$ sont méromorphes et admettent toutes les mêmes pôles avec le même ordre de multiplicité. Ces pôles sont situés sur autant de parallèles à l'axe des abscisses, que l'équation fondamentale relative à l'ori-

gine admet de racines distinctes; sur chacune de ces droites, ils forment une série de points, dont les abscisses diffèrent d'une unité; ils s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$, quand les solutions de l'équation 3) sont irrégulières à l'origine; dans le cas contraire ils ne s'étendent à l'infini, que dans la direction négative de l'axe des abscisses et l'on peut trouver une parallèle à l'axe des ordonnées, à droite de laquelle les fonctions $f_j(x)$ restent holomorphes.

Dans cette dernière région, il est possible de simplifier la formule définissant $f_j(x)$; en effet x a alors sa partie réelle assez grande pour que $y^{x-1}\psi_{j,g}$ ne contienne que des puissances de y , dans lesquelles la partie réelle de l'exposant est supérieure à -1 ; l'intégrale de la formule 7) prise le long du contour L_0 tend vers 0, quand le contour L_0 tend dans toutes parties vers l'origine et l'on peut écrire

$$21) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy,$$

L_j étant un contour partant de l'origine pour y revenir et ne contenant à son intérieur que le seul point singulier α_j .

L'étude des solutions $g(x)$ formées au moyen des intégrales prises sur le contour L_∞ donnerait des résultats analogues aux précédents; car les raisonnements faits sur les racines de l'équation fondamentale relative à l'origine et sur les fonctions v sont encore exactes pour les racines de l'équation fondamentale relative à l'infini et les fonctions w ; toutefois si ces dernières sont régulières, les pôles s'étendent à l'infini dans le sens positif et non plus dans le sens négatif de l'axe des abscisses; c'est alors dans un demi plan situé à gauche d'une parallèle à l'axe des ordonnées que les fonctions $g(x)$ sont holomorphes. Quand le point x est situé dans cette dernière région, la fonction $g_j(x)$ peut être définie par la formule 21) dans laquelle L_j désigne un contour contenant à son intérieur le seul point α_j et dont l'origine et l'extrémité sont rejetées à l'infini dans une même direction.

Le développement en séries convergentes des coefficients γ permet de trouver une nouvelle forme des fonctions $f_j(x)$.

En se reportant au système d'équations II, on voit que

$$f_{j,g} = \frac{P(\mu)}{(\omega_1 \mu - 1)^{j-g+1}}.$$

$P(\mu)$ étant un polynome en μ de degré $j-g$; on peut déterminer une parallèle à l'axe des abscisses, tel que quand le point x est situé au dessus de cette droite,

les fonctions $\gamma_{j,g}$ se développent en séries convergentes, ordonnées par rapport aux puissances croissantes de μ , c'est-à-dire de $e^{2i\pi x}$; on a

$$\gamma_{j,g} = b_{j,g}^{(1)}\mu + b_{j,g}^{(2)}\mu^2 + \dots + b_{j,g}^{(n)}\mu^n +$$

et si les deux indices sont égaux

$$\gamma_{j,j} = -1 + b_{j,j}^{(1)}\mu + \dots + b_{j,j}^{(n)}\mu^n + \dots$$

Cette parallèle à l'axe des abscisses n'est autre que la droite portant les pôles de la fonction $f_j(x)$, racines de l'équation $\omega_1\mu - 1 = 0$.

Je remplace les γ par ces développements en séries dans les équations du système II; en annulant les coefficients de μ , il vient

$$b_{j,1}^{(1)} + \omega_{j,1} = 0,$$

$$b_{j,2}^{(1)} + \omega_{j,2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_{j,j}^{(1)} + \omega_1 = 0.$$

Or par une rotation de la variable y dans le sens direct le long du contour L_0 , la fonction v_j devient $\bar{v}_j^{(1)}$; les constantes $b_{j,1}^{(1)}, b_{j,2}^{(1)} \dots b_{j,j}^{(1)}$ ne sont autres que les coefficients de $v_1, v_2, \dots v_j$ dans l'expression de $-\bar{v}_j^{(1)}$. D'une façon générale quand la variable y tourne le long du contour L_0 dans le sens direct n fois autour de l'origine, v_j devient $\bar{v}_j^{(n)}$. Or en annulant les coefficients de μ^n , on a:

$$-b_{j,1}^{(n)} + \omega_1 b_{j,1}^{(n-1)} + \dots + \omega_{j,1} b_{j,j}^{(n-1)} = 0,$$

$$-b_{j,2}^{(n)} + \omega_1 b_{j,2}^{(n-1)} + \dots + \omega_{j,2} b_{j,j}^{(n-1)} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$-b_{j,2}^{(n)} + \omega_1 b_{j,j}^{(n-1)} = 0.$$

Si l'on admet que $b_{j,1}^{(n-1)}, \dots b_{j,j}^{(n-1)}$ sont les coefficients de $v_1, v_2, \dots v_j$ dans l'expression de $-\bar{v}_j^{(n-1)}$

$$\bar{v}_j^{(n-1)} = b_{j,j}^{(n-1)} v_1 + b_{j,2}^{(n-1)} v_2 + \dots + b_{j,j}^{(n-1)} v_j$$

ces équations montrent, que $b_{j,1}^{(n)} \dots b_{j,j}^{(n)}$ sont les coefficients de $v_1, \dots v_j$ dans l'expression de $-\bar{v}_j^{(n)}$.

En remplaçant dans l'expression de V_j les coefficients γ par leurs développements en séries, il vient ainsi

$$V_j = -v_j - \mu \bar{v}_j^{(1)} - \mu^2 \bar{v}_j^{(2)} - \dots - \mu^n \bar{v}_j^{(n)}$$

Si l'on pose

$$U = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q$$

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q = \overline{q_j}(y) - q_j(y);$$

on a de même

$$U = -u - \mu \overline{u}^{(1)} - \mu^2 \overline{u}^{(2)} - \dots - \mu^n \overline{u}^{(n)} - \dots,$$

développement valable dans tout le demiplan situé au dessus de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de la fonction $f_j(x)$ dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande.

Désignant par β_0 l'argument du point a , origine du contour L_0 , et intégrant sur ce contour, on trouve

$$\int_{L_0} y^{x-1} U dy = - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} y^{x-1} u dy - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} (\overline{y^{x-1}u})^{(1)} dy - \dots - \int_{\beta_0}^{\beta_0+2\pi} (\overline{y^{x-1}u})^{(n)} dy -$$

La somme de cette série n'est autre que

$$- \int_{\beta_0}^{+\alpha} y^{x-1} u dy,$$

l'intégrale étant prise à partir du point a , sur le contour L_0 , parcouru une infinité de fois en sens direct. Ainsi dans le demiplan située au dessus de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de $f_j(x)$ dont l'ordonnée à l'origine est la plus grande, la formule 7) peut s'écrire

$$22) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy + \int_{\beta_0}^{+\alpha} y^{x-1} u dy.$$

De même on peut déterminer une seconde parallèle à l'axe des abscisses, telle que, quand le point x est situé au dessous de cette droite, les coefficients γ se développent en séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de μ :

$$\gamma_{j,g} = \frac{\beta_{j,g}^{(1)}}{\mu} + \frac{\beta_{j,g}^{(2)}}{\mu^2} + \dots + \frac{\beta_{j,g}^{(n)}}{\mu^n} + \dots$$

En portant ces valeurs de γ dans les équations II et en annulant le coefficient de $\frac{1}{\mu}$, il vient

$$\omega_1 \beta_{j,1}^{(1)} + \omega_{2,1} \beta_{j,2}^{(1)} + \dots + \omega_{j,1} \beta_{j,j}^{(1)} = 0,$$

$$\omega_1 \beta_{j,2}^{(1)} + \dots + \omega_{j,2} \beta_{j,j}^{(1)} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\omega_1 \beta_{j,j}^{(1)} = 1.$$

Si l'on considère la fonction $N_j^{(1)}$,

$$N_j^{(1)} = \beta_{j,1}^{(1)} v_1 + \beta_{j,2}^{(1)} v_2 + \cdots + \beta_{j,r}^{(1)} v_r,$$

on voit qu'elle devient par une rotation de la variable dans le sens direct le long du contour L_0 , $\bar{N}_j^{(1)}$, avec

$$\bar{N}_i^{(1)} = v_i.$$

D'une façon générale posons

$$N_j^{(n)} = \beta_{j,1}^{(n)} v_1 + \beta_{j,2}^{(n)} v_2 + \cdots + \beta_{j,j}^{(n)} v_j.$$

En annulant le coefficient de $\frac{1}{u^n}$ dans les équations II, où les γ ont été remplacés par leurs développements en séries, on trouve:

[illegible]

La fonction $N_j^{(n)}$ par une rotation de la variable en sens direct devient $N_j^{(n-1)}$; en résumé $\beta_{j,1}^{(n)}, \dots, \beta_{j,j}^{(n)}$ sont les coefficients de v_1, v_2, \dots, v_j , dans l'expression de $\bar{v}_j^{(-n)}$, cette fonction étant ce que devient v_j , quand la variable parcourt n fois le contour L_0 en tournant en sens inverse.

En remplaçant les γ par leur développement en série dans l'expression de v_i , on a donc

$$V_j = \frac{1}{n} \bar{v}_j^{(-1)} + \frac{1}{n^2} \bar{v}_j^{(-2)} + \dots + \frac{1}{n^n} \bar{v}_j^{(-n)} + \dots,$$

d'où

$$U = \frac{1}{u} \overline{u}^{(-1)} + \frac{1}{u^2} \overline{u}^{(-2)} + \dots + \frac{1}{u^n} \overline{u}^{(-n)} + \dots,$$

développement valable dans tout le demi-plan situé au dessous de celle des parallèles à l'axe des abscisses portant les pôles de $f_j(x)$ dont l'ordonnée à l'origine est la plus petite.

Or le second membre de la formule 7) définissant $f_j(x)$ peut s'écrire

$$23) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy + \int_{-L_0} y^{x-1} u dy + \int_{-L_0} y^{x-1} U dy,$$

les deux dernières intégrales étant prises sur le contour L_0 , parcouru à partir de son origine a , en sens inverse; en remplaçant U par son développement en série, il vient finalement:

$$24) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy + \int_{\gamma_0}^{\infty} y^{x-1} u dy,$$

la seconde intégrale étant prise à partir du point a sur le contour L_0 parcouru une infinité de fois en sens inverse.

Nous avons remarqué qu'au lieu de considérer les fonctions v on aurait pu pour former des solutions de l'équation aux différences finies, faire usage des fonctions v' , solutions de l'équation différentielle qui par une rotation en sens inverse deviennent des fonctions \bar{v}' , liées aux fonctions v' par des relations de même espèce que les relations I. On aurait alors formé des fonctions V' ,

$$V'_j = \gamma'_{j,1} v'_1 + \gamma'_{j,2} v'_2 + \cdots + \gamma'_{j,j} v'_j,$$

les coefficients γ' satisfaisant à des équations analogues à celles du système II, mais dans lesquelles μ désignerait non plus la quantité $e^{2i\pi x}$, mais son inverse $e^{-2i\pi x}$; on aurait ainsi obtenu des solutions:

$$25) \quad f'_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} q_j(y) dy - \int_{-L_0} y^{x-1} [c'_1 V'_1 + c'_2 V'_2 + \cdots + c'_q V'_q] dy,$$

les coefficients c' étant tels que:

$$u = \bar{q}_j(y) - q(y) = c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2 + \cdots + c'_q v'_q.$$

En raisonnant sur les coefficients γ' comme on vient de le faire sur les fonctions γ , on démontre que l'on peut déterminer une parallèle à l'axe des abscisses telle que, pour les points x appartenant au demi plan situé au dessus de cette droite, la fonction $f'_j(x)$ peut être définie par la formule 22) et une parallèle à l'axe des abscisses telle que, pour les points x appartenant au demi plan situé au dessous de cette droite, la fonction $f'_j(x)$ peut être définie par la formule 24). Les deux fonctions $f_j(x)$ et $f'_j(x)$ qui ont les mêmes pôles et sont identiques dans deux demi plans sont donc identiques dans tout le plan.

Il est clair que l'on pourrait établir des formules analogues pour les fonctions $g(x)$ et que l'on concluerait qu'elles sont identiques aux fonctions g' formées avec les solutions w' de l'équation 3).

III. Des séries divergentes représentant asymptotiquement les fonctions

$f(x)$. — Cas où l'argument de x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Les fonctions $f(x)$, solutions de l'équation aux différences finies, se présentent d'après la formule 7), comme la somme de deux intégrales prises l'une sur le contour L_0 entourant l'origine et l'autre sur le contour L_j entourant le point a_j ; pour former les séries asymptotiques qui les représentent pour les grandes valeurs de la variable, on divise ces contours en plusieurs parties convenablement choisies; désignant par I_1, I_2, \dots, I_l les intégrales relatives à chacun de ces contours partiels, dont les limites peuvent d'ailleurs varier, quand x croît, on a

$$f(x) = I_1 + I_2 + \dots + I_l.$$

Parmi les intégrales I , il en existe une, I_1 par exemple, pour laquelle on peut former une fonction P et une série,

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots,$$

telles que l'expression,

$$x^n \left[\frac{I_1}{P} - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right],$$

où n est un entier choisi arbitrairement tende vers 0 quand x s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre deux limites finies.

On démontre d'autre part que les rapports

$$\frac{I_2}{P}, \dots, \frac{I_l}{P},$$

tendent dans les mêmes conditions vers 0 comme $e^{-h\rho^k}$, h et k étant deux nombres positifs et ρ étant le module de x . L'expression

$$x^n \left[\frac{f(x)}{P} - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right],$$

tend donc vers 0 dans les mêmes conditions, et le rapport $\frac{f(x)}{P}$ est représenté asymptotiquement par la série de terme général $\frac{a_n}{x^n}$. Toute la démonstration repose donc sur la formation et l'étude des intégrales I_1, \dots, I_l ; l'une d'entre

elles donne naissance à la série asymptotique; les autres disparaissent. Pour faciliter le langage nous dirons que les rapports $\frac{I_2}{P}, \dots, \frac{I_l}{P}$ sont représentés asymptotiquement par des séries dont tous les termes sont nuls.

Je considère l'intégrale

$$26) \quad I_1 = \int y^{x-1} q_j(y) dy,$$

prise le long du contour indiqué sur la figure 1, à savoir: une portion mn d'une droite passant par α_j , une petite circonférence c de rayon $\alpha_j n$ et de centre α_j parcourue en sens direct, la portion de droite nm . Au voisinage du point α_j , la fonction $q_j(y)$ est de la forme

$$q_j(y) = (y - \alpha_j)^{j'} \psi_j(y),$$

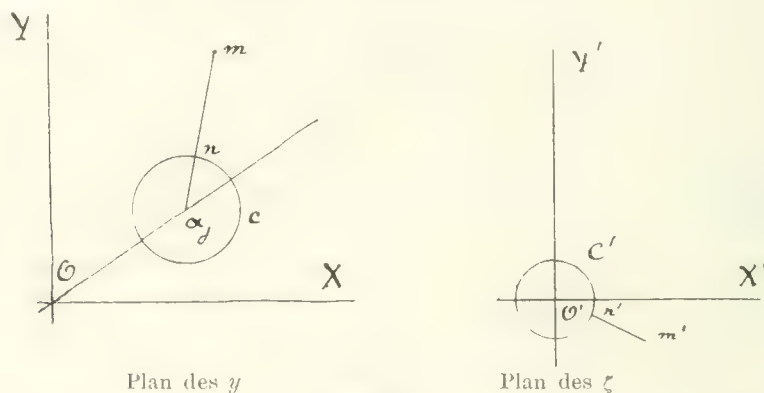


Figure 1.

$\psi_j(y)$ étant holomorphe en α_j ,

$$\psi_j(y) = a_0^j + a_1^j(y - \alpha_j) + \dots + a_n^j(y - \alpha_j)^n + \dots$$

Soit ω_j l'argument de α_j et soit ϑ l'un des angles que balaie une demi droite coïncidant d'abord avec la demi droite $\alpha_j \infty$ d'argument ω_j et tournant dans le sens direct autour du point α_j pour venir coïncider avec la demi droite nm ; je suppose qu'au point m , origine du contour d'intégration, $y - \alpha_j$ dans l'expression de $q_j(y)$ a pour argument $\omega_j + \vartheta$; je pose successivement

$$y = \alpha_j (1 + \xi),$$

$$\xi = \rho e^{i\theta},$$

$$\rho = \frac{r}{x}.$$

Il vient:

$$27) \quad I_1 = \alpha_j^{x+\lambda_j} \frac{e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} J_1$$

avec

$$28) \quad J_1 = \int \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{x-1} \zeta^{\lambda_j} \psi_j \left[\alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] d\zeta.$$

L'intégrale J_1 est prise dans le plan des ζ le long d'une portion $m'n'$ d'une droite, passant par l'origine, d'une petite circonférence c' parcourue en sens direct et enfin de la portion de droite $n'm'$; à l'origine m' du contour, ζ a pour argument $\vartheta - \pi + \sigma$, si x est égal à $\rho e^{i\sigma}$.

Pour les valeurs de $\frac{\zeta}{x}$ dont le module est inférieur à l'unité, on a

$$\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^x = e^{xL\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)} = e^{-\zeta + S}$$

en désignant par S la somme de la série absolument et uniformément convergente:

$$S = -\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{x} - \frac{1}{3} \frac{\zeta^3}{x^2} - \dots - \frac{1}{n} \frac{\zeta^n}{x^{n-1}} - \dots$$

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de $\frac{\zeta}{x}$ la série

$$e^S = 1 + \frac{S}{1} + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!} + \dots$$

on obtient la série

$$\frac{\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^x}{e^{-\zeta}} = 1 + \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \dots + \frac{e_n}{x^n} + \dots$$

dans laquelle les coefficients e sont des polynomes en ζ et qui est absolument et uniformément convergente pour les valeurs de ζ , dont le module est inférieur à celui de x . D'autre part pour les valeurs de $\frac{\zeta}{x}$ suffisamment petites on a

$$\psi_j \left[\alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] = \alpha_0^j - \frac{\alpha_1^j \alpha_j \zeta}{x} + \dots + (-1)^n \alpha_n^j \left(\frac{\alpha_j \zeta}{x} \right)^n + \dots$$

La fonction $\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{-1}$ se développe de même suivant les puissances croissantes

de $\frac{\zeta}{x}$. Finalement pour les valeurs de ζ dont le module est inférieur ou égal à $K\rho$, K étant un nombre positif inférieur à l'unité et convenablement choisi, on a

$$\left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{x-1} \frac{\psi_j \left[\alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right]}{e^{-\zeta}} d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \cdots + \frac{d_n^j}{x^n} + \cdots$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente. Dans le développement du produit $\psi \left[\alpha_j \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right) \right] \left(1 - \frac{\zeta}{x}\right)^{-1}$, le coefficient de $\frac{1}{x^n}$ contient ζ^n en facteur; dans la série représentant e^ζ , e_n est un polynôme en ζ dont le terme de plus haut degré est de degré $2n$. Il en résulte qu'à l'exception du premier coefficient d_0^j qui est égal à α_0^j , les coefficients d_p^j sont des polynômes en ζ ; le terme de plus bas degré de d_p^j est de degré p , le terme de plus haut degré est de degré $2p$. Je considère le reste de la série,

$$R_n = \frac{1}{x^n} \left[\frac{d_{n+1}^j}{x} + \frac{d_{n+2}^j}{x^2} + \cdots \right].$$

Si le module de ζ reste inférieur ou égal à ρ^β , β étant un nombre positif satisfaisant à l'inégalité

$$2(n+q)\beta - q < 0$$

le terme $\frac{d_{n+q}^j}{x^q}$ tend vers 0 quand ρ augmente indéfiniment. Or quand q varie depuis 1 jusqu'à l'infini la fraction $\frac{q}{n+q}$ croît à partir de $\frac{1}{n+1}$ et tend vers 1. Si l'on assujettit β à satisfaire à l'inégalité

$$\beta < \frac{1}{2(n+1)},$$

tous les termes de la série dans la parentèse tendent vers 0 et la série étant uniformément convergente, on peut écrire

$$R_n = \frac{\varepsilon_1}{x^n},$$

ε_1 tendant vers 0 comme $\rho^{2(n+1)\beta-1}$, quand ρ augmente indéfiniment.

Je choisis alors le contour sur lequel est prise l'intégrale J_1 de la façon suivante; la circonférence c' conserve un rayon invariable; le point m' a pour module ρ^β et s'éloigne à l'infini, quand ρ augmente indéfiniment, la droite $n'm'$ ayant

toujours pour argument $\vartheta - \pi + \sigma$. Dans ces conditions le module de $\frac{\zeta}{x}$ est au plus égal à $\varrho^{\beta-1}$ et tend vers 0; le contour $m'n, c, nm$ sur lequel est prise l'intégrale J_1 se déforme en restant semblable à lui-même, tous ses points tendant vers α_j ; il vient ainsi

$$J_1 = \int_{\gamma} e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta.$$

Considérons l'intégrale:

$$\int_{\gamma} \varepsilon_1 e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} d\zeta$$

et plus généralement l'intégrale

$$\int_{\gamma} \varepsilon_1 e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} (L\zeta)^p d\zeta,$$

où p est un entier positif.

Quand l'argument de ζ reste compris dans un intervalle où son cosinus est toujours positif, ces intégrales tendent uniformément vers 0 comme ε_1 ; de même l'intégrale

$$\int_{\gamma} e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} [L\zeta]^p d\zeta$$

prise sur la droite $m'n'$, depuis le point m' jusqu'à l'infini tend uniformément vers 0, comme e^{-he^k} , h et k étant deux nombres positifs, quand ϱ augmente indéfiniment, pourvu que l'argument de ζ reste compris dans un intervalle où son cosinus est constamment positif. On a donc finalement

$$J_1 = \int_{\gamma} e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j} \left[d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n} \right] d\zeta + \frac{\varepsilon_2}{x^n},$$

ε_2 tendant vers 0, σ restant compris dans un intervalle tel que $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$ y soit toujours positif.

Chaque terme du polynôme d_p^j donne naissance à une intégrale

$$\int_{\gamma} e^{-\zeta} \zeta^{\lambda_j + p} d\zeta.$$

Si dans ces intégrales je rejette le point m' à l'infini, je ne fais qu'ajouter au second membre de J_1 des termes qui tendent vers 0 comme e^{-he^k} ; on a donc

$$29) \quad J_1 = E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon_3}{x^n},$$

ε_3 tendant encore uniformément vers 0, quand σ reste compris dans le même intervalle. Le coefficient E_p^j se déduit de d_p^j en remplaçant dans ce dernier ζ^q par $(e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + q + 1)$, quand $\vartheta - \pi + \sigma$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; si $\vartheta - \pi + \sigma$ est compris entre $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$, K étant entier positif ou négatif, on a :

$$\int e^{-\zeta^{\lambda_j+q}} d\zeta = e^{2Ki\pi\lambda_j} [e^{2i\pi\lambda_j} - 1] \Gamma(\lambda_j + q + 1).$$

Les coefficients de la série sont alors multipliés par $e^{2Ki\pi\lambda_j}$; de même si le cercle c était parcouru en sens inverse au lieu d'être parcouru en sens direct, les coefficients de la série obtenue se déduiraient des coefficients E en multipliant ces derniers par $-e^{-2i\pi\lambda_j}$. En résumé si l'on désigne par S_j la somme :

$$30) \quad S_j = E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n},$$

et si l'on pose,

$$31) \quad P_j = \frac{\alpha_j^{x+j} \zeta^{x+j+1}}{x^{\lambda_j+1}},$$

on a :

$$32) \quad \frac{I_1}{P_j} - S_j = \frac{\varepsilon_3}{x^n}.$$

ε_3 tendant uniformément vers 0, quand ϱ augmente indéfiniment, σ restant compris dans un intervalle où $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$ est toujours positif. La quantité ε_3 se présente comme la somme de deux autres quantités dont l'une tend vers 0 comme ε_1 , autrement dit comme une certaine puissance négative de ϱ , et l'autre comme $e^{-h\varrho^k}$; au total ε_3 tend donc vers 0 comme une puissance négative de ϱ . La série de terme général $\frac{d_n^j}{x^n}$ est convergente; si l'on intègre seulement jusqu'au point m' dont la distance à l'origine est ϱ^j , on obtient une série convergente; mais comme dans S_j les intégrales sont prises au delà de ce point, jusqu'à l'infini, cette série peut être divergente.

Avant d'aller plus loin je vais traiter immédiatement le cas où dans l'intégrale I_1 figure sous le signe \int une puissance entière et positive de $L(y - \alpha_j)$. Supposons que l'on ait :

$$33) \quad I_1 = \int y^{x-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_j} L(y - \alpha_j) \psi(y) dy,$$

ψ étant holomorphe au voisinage de α_j ; en opérant encore les mêmes changements de variable, il vient:

$$I_1 = P_j \int e^{-\xi \zeta^{\lambda_j}} L \frac{e^{i\pi} \alpha_j \zeta}{x} \left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right],$$

ou

$$I_1 = P_j \left[J_1^{(0)} L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + J_1^{(1)} \right],$$

en désignant par $J_1^{(0)}$ l'intégrale de même nature que celle qui vient d'être étudiée,

$$34) \quad J_1^{(0)} = \int e^{-\xi \zeta^{\lambda_j}} \left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta,$$

et par $J_1^{(1)}$ l'intégrale

$$35) \quad J_1^{(1)} = \int e^{-\xi \zeta^{\lambda_j}} L \zeta \left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] d\zeta.$$

En rejetant à l'infini le point m' , on obtient pour $J_1^{(0)}$ la série

$$E_0 + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n} + \dots.$$

Pour $J_1^{(1)}$ on obtient la série dont les termes se déduisent de ceux de la série précédente, en dérivant par rapport à λ_j ,

$$\frac{dE_0}{d\lambda_j} + \frac{1}{x} \frac{dE_1}{d\lambda_j} + \dots + \frac{1}{x^n} \frac{dE_n}{d\lambda_j} + \dots$$

On a donc:

$$I_1 = P_j \left[S L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + \frac{dS}{d\lambda_j} + \frac{\varepsilon}{x^n} L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x} + \frac{\varepsilon'}{x^n} \right],$$

en posant,

$$36) \quad S = E_0 + \frac{E_1}{x} + \dots + \frac{E_n}{x^n},$$

ε et ε' tendant vers 0 comme une puissance négative de q ; mais $\varepsilon L \frac{\alpha_j e^{i\pi}}{x}$ tend alors vers 0 comme le produit d'une puissance négative de q par Lq et finalement il vient:

$$37) \quad I_1 = \frac{dP_j S}{d\lambda} + P_j \frac{\varepsilon''}{x^n},$$

ε'' tendant uniformément vers 0 comme le produit d'une puissance négative de q par Lq quand l'argument σ reste dans un intervalle où $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$ est constamment positif. Plus généralement supposons que l'on ait:

$$38) \quad I_1 = \int_0^1 y^{x-1} (y - \alpha_j)^{k_j} [L(y - \alpha_j)]^p \psi(y) dy,$$

$\psi(y)$ étant holomorphe en α_j et p étant entier positif.

En faisant toujours les mêmes changements de variable, il vient:

$$39) \quad I_1 = P_j \left[J_1^{(0)} \left(L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^p + C_p^1 J_1^{(1)} \left(L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^{p-1} + \dots + C_p^l J_1^{(l)} \left(L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right)^{p-l} + \dots + C_p^p J_1^{(p)} \right],$$

en posant,

$$40) \quad J_1^{(0)} = \int_0^1 e^{-\varepsilon \zeta} \left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] d\zeta,$$

$$41) \quad J_1^{(l)} = \int_0^1 e^{-\varepsilon \zeta} \zeta^{k_j} [L\zeta]^l \left[d_0 + \frac{d_1}{x} + \dots + \frac{d_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] d\zeta.$$

La série figurant sous le signe \int dans la formule 40) est formée au moyen du développement de $\psi(y)$ au voisinage de α_j , comme la série correspondante de terme général $\frac{d_n'}{x^n}$ a été formée avec le développement de $\psi_j(y)$; l'intégrale $J_1^{(0)}$ donne naissance, quand le point m est rejeté à l'infini dans une direction telle que $\cos(\vartheta - \pi + \sigma)$ soit positif, à une série de terme général $\frac{E_n}{x^n}$; l'intégrale $J_1^{(q)}$ donne naissance dans les mêmes conditions à une série, dont le terme général est $\frac{1}{x^n} \frac{d^q E_n}{d\lambda_j^q}$.

Comme d'autre part les quantités $\varepsilon \left[L \frac{e^{i\pi} \alpha_j}{x} \right]^q$ tendent vers 0 comme le produit d'une certaine puissance négative de q par $(Lq)^q$, il vient:

$$42) \quad I_1 = \frac{d^p}{d\lambda_j^p} (P_j S) + P_j \frac{\varepsilon}{x^n},$$

S étant défini par la formule 36) et ε tendant vers 0 uniformément, quand σ reste compris dans un intervalle, telle que $\cos(\vartheta - \varepsilon + \sigma)$ soit constamment positif.

Soit un contour L tout entier à distance finie, ne passant pas par l'origine, sur lequel la fonction $\psi(y)$ reste finie et considérons la fonction de x ,

$$43) \quad I = \int_L y^x \psi(y) dy.$$

Si M est une limite supérieure des valeurs prises par $\psi(y)$ quand y décrit le contour L , on a

$$\left| \frac{I}{\alpha_j^x} \right| < M \left| \frac{y_j^x}{\alpha_j^x} \right| L,$$

L étant la longueur du contour et y_1 le point du contour pour lequel y^x a un module maximum.

J'effectue alors une transformation dont il sera souvent fait usage par la suite; au point

$$y = r e^{is}$$

je fais correspondre le point z de coordonnées rectangulaires,

$$44) \quad z \begin{cases} \xi = L r, \\ \eta = -s. \end{cases}$$

Au point α_j correspond ainsi un point α'_j de coordonnées ξ_j, η_j ,

$$\begin{aligned} \xi_j &= L |\alpha_j|, \\ \eta_j &= -\arg \alpha_j. \end{aligned}$$

Si suivant les notations déjà employées, x est égal à $\varrho e^{i\sigma}$, on voit que

$$|y^x| = e^{\varrho [\xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma]}.$$

Or la quantité $\xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma$ mesure en grandeur et en signe dans le plan des z le segment Op , ayant pour origine l'origine des coordonnées et pour extrémité le point p , projection sur la direction σ du point (ξ, η) .

Quand le point y parcourt le contour L , son transformé z parcourt le contour L' , transformé de L ; si la projection Op de Oz reste inférieure à la projection du vecteur $O\alpha'_j$ pour tous les arguments σ de l'intervalle (σ_1, σ_2) , le rapport

$\frac{I}{\alpha_j^x}$ tend vers 0 comme $e^{-h\varrho}$, h étant positif, quand ϱ augmente indéfiniment et cela uniformément, quand σ reste compris dans l'intervalle (σ_1, σ_2) .

Dans ces conditions, on peut donc écrire

$$I = P_j \varepsilon^{\frac{1}{n}},$$

ε tendant uniformément vers 0 et l'on se trouve dans le cas signalé au début du présent chapitre, où le rapport $\frac{I}{P_j}$ est représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls.

Ce même résultat subsiste, quand le contour L est une portion de droite Oa , issue de l'origine O , sur laquelle on a

$$\psi(y) = y^q (Ly)^p \chi(y),$$

p étant un nombre entier positif et $\chi(y)$ n'étant ni nul, ni infini en aucun point de Oa y compris l'origine; on peut en effet trouver alors un nombre k positif, tel que le produit

$$y^k \psi(y)$$

reste en module, à l'origine et sur la droite Oa , inférieur à un nombre fini M ; on a alors

$$|I| < M \int_0^a e^{\varrho[\cos \sigma Lr - s \sin \sigma] - k Lr} dr.$$

Si $\cos \sigma$ est positif et si ϱ est suffisamment grand pour que $\varrho \cos \sigma - k + 1$ soit positif, il vient en effectuant l'intégration

$$|I| < M \frac{r_1^{-k+1} e^{\varrho[\cos \sigma Lr_1 - s \sin \sigma]}}{\varrho \cos \sigma - k + 1},$$

r_1 étant la distance du point a à l'origine. Quand le transformé a' du point a est tel que la projection du vecteur $O'a'$ du plan z sur les directions de l'intervalle (σ_1, σ_2) reste inférieure à la projection du vecteur $O'a'_j$, le rapport $\frac{I}{\alpha_j^x}$ tend uniformément vers 0, σ restant compris dans cet intervalle et le rapport $\frac{I}{P_j}$ est encore représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, comme dans le cas précédent; toutefois il est nécessaire que $\cos \sigma$ reste positif dans tout l'intervalle (σ_1, σ_2) .

Je considère pour terminer une courbe L aboutissant au point α_j ; l'intégrale

$$I = \int_L y^{x-1} (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [L(y - \alpha_j)]^q \psi(y) dy$$

est prise sur cette courbe depuis un point p voisin de α_j jusqu'au point m dont la distance à α_j est $\rho^{\beta-1}$, β étant un nombre positif inférieur à l'unité et tend par conséquent vers 0 quand x s'éloigne à l'infini. La fonction $\psi(y)$ reste en module inférieure à un nombre positif, quand y varie sur la courbe L depuis p jusqu'en α_j ; il en est donc de même du quotient $\frac{\psi(y)}{y}$. Enfin le nombre q est entier positif ou nul.

Je pose

$$\begin{aligned} \lambda_j &= a + bi, \\ y - \alpha_j &= r' e^{is'}, \\ y &= r e^{is}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |(y - \alpha_j)^{\lambda_j}| &= r'^a e^{-bs'}, \\ |[L(y - \alpha_j)]^q| &= [Lr'^2 + s'^2]^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Sur la courbe L , $e^{-bs'}$ reste fini; de plus en choisissant un point p suffisamment voisin de α_j , on peut trouver deux nombres positifs M et k tels que sur tous les points de pm , m tendant vers α_j , on ait

$$r'^a [(Lr')^2 + s'^2]^{\frac{q}{2}} < M \rho^k.$$

Je considère alors la courbe L' , transformée de L dans le plan z ; elle aboutit au point α'_j , transformé de α_j ; si l'on suppose que L' est une portion de droite, L est un arc de spirale; en désignant par ξ, η les coordonnées d'un point de la droite L' , on a

$$\begin{aligned} Lr &= \xi = \xi_j + ut, \\ -s &= \eta = \eta_j + vt, \end{aligned}$$

u et v étant deux constantes; de plus

$$dy = r e^{is} (u - iv) dt,$$

et l'on voit que l'on peut écrire finalement:

$$|I| < R \varrho^k \int_{t_1}^{t_2} e^{\varrho [\cos \sigma (\dot{z}_j + u t) + \sin \sigma (\eta_j + v t)]} dt,$$

ou

$$\left| \frac{I}{\alpha_j^r} \right| < R \varrho^k \frac{e^{\varrho [u \cos \sigma + v \sin \sigma] t_2} - e^{\varrho [u \cos \sigma + v \sin \sigma] t_1}}{u \cos \sigma + v \sin \sigma},$$

t_1 et t_2 étant les valeurs de t correspondant respectivement aux points p' et m' , transformés des points p et m ; il convient de supposer que $u \cos \sigma + v \sin \sigma$ n'est pas nul, autrement dit qu'aucune des directions de l'intervalle (σ_1, σ_2) auquel appartient σ n'est perpendiculaire à la droite L' . La quantité

$$(u \cos \sigma + v \sin \sigma) t_1$$

est la différence

$$O' p'_1 - O' p_j$$

des projections sur la direction σ des vecteurs $O' p'$ et $O' \alpha'_j$ dans le plan des z . De même si m'_1 est la projection de m' , on a

$$(u \cos \sigma + v \sin \sigma) t_2 = O' m'_1 - O' p_j.$$

D'autre part au voisinage du point α_j , sur la courbe L le module r de y est une fonction du module r' de $y - \alpha_j$ et l'on peut écrire

$$r = r_j + c_1 r' + c_2 r'^2 + \dots$$

r_j étant le module de α_j .

On en tire

$$Lr - Lr_j = ut = d_1 r' + d_2 r'^2 + \dots,$$

d'où

$$t_2 = \frac{1}{u} [d_1 \varrho^{\beta-1} + d_2 \varrho^{2(\beta-1)} + \dots]$$

puisque au point m le module r' est égal à $\varrho^{\beta-1}$.

On peut choisir β assez petit pour que dans le développement du produit ϱt_2 tous les termes de la série tendent vers 0, quand ϱ augmente indéfiniment, sauf le premier qui devient infini comme ϱ^β ; dans ces conditions l'expression

$$\varrho [O' m'_1 - O' p_j]$$

devient infini comme ϱ^β . Quand σ reste compris dans un intervalle (σ_1, σ_2) tel que les différences $O' p'_1 - O' p_j$ et $O' m'_1 - O' p_j$ y soient constamment négatives, le

rapport $\frac{I}{\alpha_j^x}$ tend uniformément vers 0 comme $e^{-h_0^k}$, h et k étant positifs. Ainsi dans ce cas encore le rapport $\frac{I}{P_j}$ est représenté asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls.

Les résultats qui précèdent, permettent de former les séries représentant asymptotiquement à l'infini les fonctions $f_j(x)$ solutions de l'équation aux différences finies formées au chapitre I. Les séries représentant une même fonction $f_j(x)$ diffèrent suivant la valeur de l'argument avec lequel la variable x s'éloigne à l'infini; posant toujours

$$x = \sigma t^r,$$

nous distinguerons donc plusieurs cas.

Je suppose d'abord que σ appartient à l'intervalle $\left(r, \frac{r}{2} - r\right)$, r étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Soit α_j une racine simple du polynome B_0 ; dans la formule 7) définissant la fonction $f_j(x)$, la fonction $\varphi_j(y)$ solution de l'équation différentielle 3) est de la forme

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{2j} \psi_j(y),$$

$\psi_j(y)$ étant holomorphe en α_j . Choissant un point a de la droite $O\alpha_j$ situé entre O et α_j , je prends pour contour L_0 une circonférence de centre O et de rayon Oa , parcourue dans le sens direct à partir du point a ; le contour L_j se composera de la portion de droite an , n étant un point de $O\alpha_j$ voisin de α_j , d'une petite circonférence s_j de centre α_j et de rayon $\alpha_j n$, parcourue dans le sens direct et de la portion de droite na .

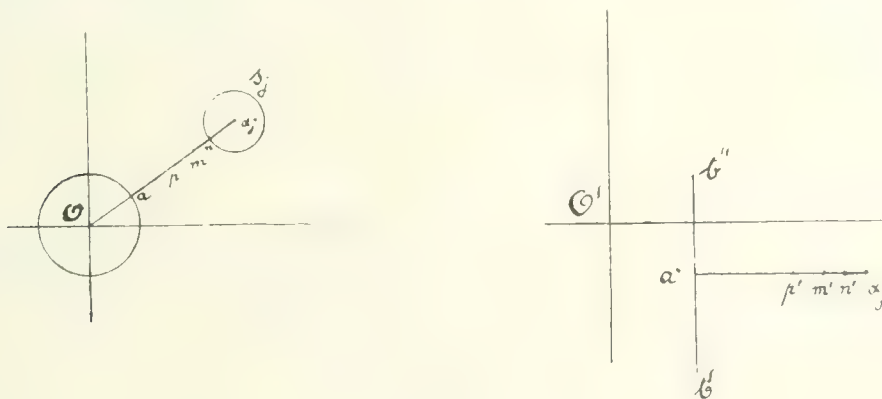


Figure 2.

La transformation définie précédemment fait correspondre dans le plan des z , à la portion de droite $a\alpha_j$ une parallèle à l'axe des abscisses passant par le point α'_j , transformé de α_j ; le point a' transformé de a est situé à gauche de α'_j ; au cercle L_0 parcouru en sens direct correspond une portion de droite $a'b'$ parallèle à l'axe des ordonnées, dirigée dans le sens des ordonnées décroissantes et de longueur 2π . L'intégrale prise le long du contour L_j se divise en trois parties. La première I_1 correspond au contour mn, s_j, nm , m étant un point de $O\alpha_j$, situé entre a et n et dont la distance à α_j est égale à $\varrho^{\beta-1}$, β étant un nombre positif inférieur à l'unité; la seconde I_2 comprend les deux portions d'intégrales prises sur la portion de droite pm , p étant un point fixe, entre a et n , voisin de α_j . La troisième comprend les deux portions d'intégrales prises sur ap .

L'angle désigné plus haut par ϑ est ici égal à π , on a donc

$$\vartheta - \pi + \sigma = \sigma.$$

Si σ est compris entre $-\frac{\pi}{2} + \nu$ et $\frac{\pi}{2} - \nu$, en choisissant convenablement β , on a d'après la formule 32):

$$45) \quad I_1 = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} \left[E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant uniformément vers 0.

Les rapports $\frac{I_2}{P_j}, \frac{I_3}{P_j}$ sont représentés par des séries asymptotiques dont tous les termes sont nuls. Il est en effet évident que quand le point z transformé de y parcourt la droite $a'm'$, la projection du vecteur $O'z$ sur les directions σ de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ reste inférieure à la projection de $O'\alpha'_j$.

Quand σ appartient à cet intervalle on a donc finalement:

$$46) \quad \int_{L_j^+} y^{x-1} q_j(y) dy = P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant uniformément vers 0.

D'autre part quand le point z décrit la droite $a'b'$, la projection du vecteur $O'z$ sur les directions de l'intervalle $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ est manifestement inférieure à la projection de $O'\alpha'_j$; les intégrales de la forme

$$I_l = \int_{L_0} y^{x-1} v_l(y) dy$$

sont telles que les rapports $\frac{I_l}{P_j}$ sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Enfin les coefficients γ solutions des systèmes analogues à II tendent uniformément vers 0 ou vers l'unité quand x s'éloigne à l'infini avec un argument compris dans le même intervalle. Le quotient de l'intégrale prise le long du contour L_0 figurant dans la formule 7), par la fonction P_j est représenté asymptotiquement par une série à termes nuls et l'on peut écrire,

$$47) \quad f_j(x) = \frac{e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} \left[E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant uniformément vers 0 quand q devient infini, σ appartenant à l'intervalle $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu \right)$.

La même fonction $f_j(x)$ peut être définie par la formule 23),

$$23) \quad f_j(x) = \int_{L_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{-L_0} y^{x-1} u dy + \int_{-L_0} y^{x-1} U dy.$$

Or l'image du contour $-L_0$, autrement dit de la circonférence L_0 parcourue à partir du point a en sens inverse est dans le plan des z , une portion de droite $a'b''$, d'origine a' , de longueur 2π parallèle à l'axe des ordonnées et dirigée dans le sens des ordonnées croissantes. Quand le point z décrit la droite $a'b''$, la projection du vecteur $O'z$ sur les directions de l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu \right)$ reste inférieure à la projection de $O'a'_j$; d'autre part les coefficients γ tendent tous vers 0 quand x s'éloigne à l'infini dans une direction appartenant au même intervalle. Le quotient des intégrales de la formule 23) prises sur le contour $-L_0$, par la fonction P_j est représenté par une série asymptotique dont tous les termes sont nuls et l'égalité 47) subsiste, ε tendant uniformément vers 0 quand σ appartient à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu \right)$.

Il reste à examiner ce qui se passe quand l'argument σ reste compris dans l'intervalle $(-\nu, \nu)$. Deux cas se présentent.

Si les fonctions v_1, \dots, v_q sont régulières au voisinage de l'origine, les pôles de la fonction $f_j(x)$ ne s'étendent pas à l'infini dans la direction positive de l'axe des abscisses; on peut tracer une parallèle à l'axe des ordonnées à droite de laquelle la fonction $f_j(x)$ reste holomorphe; dans le demi-plan ainsi défini elle est représentée par la formule 21), le contour L_j se composant de la droite On , de la

circonférence s_j et de la droite nO . L'intégrale prise sur ce contour se divise en deux parties; l'une correspond au contour an, s_j, na et donne naissance à la série asymptotique S_j ; l'autre est la somme des deux intégrales prises sur la portion de droite Oa ; en prenant a suffisamment voisin de O , on constate que les rapports de ces intégrales à la fonction P_j sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Ainsi l'égalité 47) subsiste encore; elle s'applique à l'intervalle entier $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$, ε tendant uniformément vers 0.

Il n'en est plus de même si les fonctions v_1, \dots, v_q ne sont pas toutes régulières au voisinage de l'origine; les pôles de la fonction $f_j(x)$ s'étendent alors à l'infini dans la direction positive de l'axe des abscisses; l'égalité 47) est vraie dans chacun des intervalles $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$, $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$, ε tendant uniformément vers 0, si petit d'ailleurs que soit le nombre positif ν ; mais la direction positive de l'axe des abscisses forme coupure et elle n'est plus vérifiée dans l'intervalle $(-\nu, \nu)$, tout au moins quand on n'astreint le point x s'éloignant à l'infini, à ne satisfaire à aucune nouvelle condition.

Les fonctions γ sont comme on l'a déjà vu de la forme

$$\gamma_{j,g} = \frac{P(\mu)}{(\omega_1 \mu - 1)^{j-g+1}},$$

$P(\mu)$ étant un polynôme en μ de degré $j-g$ avec

$$\mu = e^{2i\pi x}.$$

Quand le point x s'éloigne à l'infini, σ restant compris dans l'intervalle $(-\nu, \nu)$, cette fonction γ reste donc finie pourvu que le point x reste à distance finie des pôles racines des équations

$$\omega_1 e^{2i\pi x} - 1 = 0.$$

D'autre part si le point a est assez rapproché de l'origine et l'angle ν assez petit, on voit manifestement que les rapports $\frac{I_l}{P_j}$ sont représentés asymptotiquement par des séries à termes nuls. Il en résulte que si l'on astreint le point x à s'éloigner à l'infini en restant toujours à distance finie des pôles de $f_j(x)$ et seulement dans ce cas l'égalité 47) subsiste encore.

Les raisonnements qui précèdent supposent que sur la droite Oa_j entre O et a_j , les solutions de l'équation différentielle 3) n'admettent aucun point singulier; il se pourrait qu'il n'en soit pas ainsi et que quelques points racines du polynôme B_0 soient situés précisément sur cette portion de droite. Soit a_l l'un d'eux; on

évite ce point α_l dans le contour L_j en remplaçant la portion de droite $O\alpha_j$ voisine de α_l par une petite demicirconférence de centre α_l et située par rapport à $O\alpha_j$ soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments décroissants. Il est facile de vérifier que dans ces conditions, tous les résultats démontrés sont encore exacts; toutefois il faut noter que suivant le côté de la droite $O\alpha_j$ où se trouve le demi cercle, les fonctions $f_j(x)$ définies par la formule 7) sont différentes.

A chacune des fonctions $f_j(x)$ correspondant à une racine simple du polynome B_0 correspond une série divergente S_j formée au moyen de la solution $\varphi_j(y)$ de l'équation différentielle 3) régulière et non holomorphe en α_j . Cette série représente asymptotiquement le rapport $\frac{f_j(x)}{P_j}$, soit dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si les solutions de l'équation 3) sont régulières à l'origine, soit dans les intervalles $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right), \left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si ces solutions sont irrégulières en ce point.

Il convient de remarquer que pour former la série divergente S_j dont le terme général est $\frac{E^j}{x^n}$, on a supposé que dans la solution $\varphi_j(y)$

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{2j} \psi_j(y)$$

la quantité $y - \alpha_j$ avait pour argument $\omega_j + \pi$, quand y vient en m , origine du contour $m n, s_j, n m$. Si l'argument de x , au lieu d'être compris entre $-\frac{\pi}{2} + \nu$ et $\frac{\pi}{2} - \nu$, était compris plus généralement entre $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi + \nu$ et $\frac{\pi}{2} + 2K\pi - \nu$, K étant entier, il est clair, d'après ce qui a été dit au début du présent chapitre, que les coefficients E de la série devraient être multipliés par $e^{2K\pi i 2j}$; mais comme P_j contient en dénominateur x^{2j} , le développement asymptotique de $f_j(x)$ ne change finalement pas de valeur, ce qui est naturel puisque la fonction $f_j(x)$ est uniforme.

IV. Quelques cas particuliers.

Nous allons rechercher comment les résultats du précédent chapitre s'étendent aux fonctions $f(x)$ correspondant aux racines multiples, non nulles du polynome B_0 , au voisinage desquelles les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières.

Soit α_j une racine d'ordre de multiplicité p du polynome B_0 ; supposons que

les solutions de 3) sont toutes régulières en ce point; l'équation déterminante admet les racines entières

$$0, 1, \dots, q - p - 1,$$

et les p racines $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,p}$ en général non entières.

Je suppose tout d'abord qu'aucune des différences des λ n'est entière positive, négative ou nulle. A ces racines correspondent p solutions de l'équation 3) de la forme

$$q_{j,l} = (y - \alpha_j)^{\lambda_{j,l}} \psi_{j,l}(y),$$

$\psi_{j,l}(y)$ étant holomorphe en α_j . Au moyen de chacune d'elles on forme une solution $f_{j,l}$ de l'équation aux différences finies à laquelle s'applique les résultats du précédent chapitre. L'intégrale prise sur le contour L_j est représentée asymptotiquement par une série S_j^l formée avec la fonction $\psi_{j,l}(y)$ et l'on a

$$48) \quad f_{j,l}(x) = P_j^l \left[S_j^l + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

avec

$$49) \quad P_j^l = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,l}} e^{i\pi\lambda_{j,l}+1}}{x^{\lambda_{j,l}+1}},$$

ε tendant uniformément vers 0, quand σ reste compris soit dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si les fonctions v sont régulières à l'origine, soit dans les intervalles $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right), \left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si les fonctions v sont irrégulières à l'origine. Dans ce dernier cas l'égalité 48) n'est vérifiée, quand σ appartient à l'intervalle $(-\nu, \nu)$, que si le point x s'éloigne à l'infini en restant à distance finie des pôles des fonctions $f(x)$.

Supposons au contraire que parmi les différences des λ , il s'en trouve qui soient entières positives, négatives ou nulles. Les p racines λ se répartissent en groupes tels que les racines d'un même groupe diffèrent d'un entier positif, négatif ou nul; à chacun de ces groupes correspond un groupe de solutions de 3) de la forme 11),

avec

$$51) \quad P_{j,g} = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,g}} e^{i\pi(\lambda_{j,g}+1)}}{x^{\lambda_{j,g}+1}}.$$

La quantité ε tend uniformément vers 0 quand σ appartient soit à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si les fonctions v sont régulières à l'origine, soit à chacun des intervalles $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, -\nu\right)$, $\left(\nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$ si ces fonctions sont irrégulières à l'origine; dans ce dernier cas l'égalité 50) n'est vérifiée dans l'intervalle $(-\nu, \nu)$, que si le point x est astreint à rester à distance finie des pôles de la fonction $f_{j,g}$.

Le second membre de l'égalité 50) se présente sous la forme:

$$\frac{\alpha_j^{x+\lambda_{j,g}}}{x^{\lambda_{j,g}+1}} \left[a_0^1 + \frac{a_1^1}{x} + \dots + \frac{a_n^1}{x^n} + Lx \left(a_0^2 + \frac{a_1^2}{x} + \dots + \frac{a_n^2}{x^n} \right) + \dots + (Lx)^{g-1} \left(a_0^g + \dots + \frac{a_n^g}{x^n} \right) + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

Ainsi dans la parenthèse la série ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x des égalités 47) et 48) est remplacée par une somme de séries de ce genre, multipliées respectivement par des puissances entières de Lx jusqu'à la puissance $g-1$, exposant de la plus haute puissance de $L(y-\alpha_j)$ contenue dans l'expression de $\varphi_{j,g}$.

Dans ce cas on peut faire une remarque qui nous sera utile par la suite; quand on a:

$$\lambda_{j,g} = \lambda_{j,g-1} = \dots = \lambda_{j,g-f+1} = \lambda_{j,g-f},$$

on sait que dans l'expression de $\varphi_{j,g}$ la dernière des fonctions $\psi_{g,1}^j, \psi_{g,2}^j, \dots, \psi_{g,g}^j$ holomorphes en α_j dont le développement en ce point commence par un terme constant non nul est $\psi_{g,f}^j$. Il en résulte que la dernière des séries $S_{j,1}^g, S_{j,2}^g, \dots, S_{j,g}^g$ qui commencent par un terme constant non nul, est $S_{j,f}^g$. Dans ces conditions le coefficient de $(Lx)^{f-1}$ sera une série ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x dont le premier terme est différent de 0; il est égal au terme constant de $\psi_{g,f}^j$ multiplié par $\Gamma(\lambda_{j,g}+1)(e^{2i\pi\lambda_{j,g}}-1)$. Les séries multipliant les puissances de Lx supérieures à $f-1$ commencent par des termes constants nuls. On pourra donc écrire en prenant $n=0$,

$$52) \quad f_{j,g}(x) = P_{j,g} [a_1 + a_2 Lx + \dots + a_f (Lx)^{f-1} + \varepsilon],$$

le coefficient a_f étant sûrement différent de 0.

Quand les λ sont tous différents on voit que f est égal à 1 et toutes les puissances du logarithme sont multipliées par des séries dont le terme constant est nul.

Je signalerai encore les particularités des développements asymptotiques trouvés par les méthodes précédentes quand, α_j étant une racine simple de B_0 , la racine λ_j de l'équation déterminante est entière.

Nous avons vu au chapitre I que si, λ_j étant entier et négatif, la fonction $\varphi_j(y)$ correspondante ne contient pas de logarithme, la fonction $f_j(x)$ solution de l'équation aux différences finies est définie par l'égalité 9). Dans cette égalité le contour L_j peut être considéré comme se composant d'une portion de droite an , du cercle s_j et de la portion de droite na ; en appliquant la méthode du chapitre précédent on constate que les coefficients E_p^j de la série de terme général $\frac{E_p^j}{x^p}$ sont de la forme:

$$E_p^j = (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) [d_1 \Gamma(\lambda_j + p + 1) + d_2 \Gamma(\lambda_j + p + 2) + \dots + d_q \Gamma(\lambda_j + p + q)].$$

Or comme λ_j est entier et négatif les produits

$$(e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + m),$$

sont finis quand $\lambda_j + m$ est égal à un entier négatif ou nul; ces mêmes produits sont nuls quand $\lambda_j + m$ est un entier positif. Les coefficients E_p^j sont donc nuls quand

$$p > -\lambda_j - 1,$$

et sont finis quand

$$p < -\lambda_j - 1.$$

La série asymptotique correspondant à $\varphi_j(y)$ a donc un nombre fini de termes; elle se réduit à

$$E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_{-\lambda_j-1}^j}{x_j^{-\lambda_j-1}}.$$

Ces résultats sont bien en conformité avec ceux du chapitre I où l'on a vu que la fonction $f_j(x)$ n'est autre que le produit d'un polynome de degré $-\lambda_j - 1$ par la fonction α_j^x .

Quand λ_j est entier et négatif, il se peut que $\varphi_j(y)$ soit de la forme:

$$\varphi_j(y) = (y - \alpha_j)^{\lambda_j} [\psi_{j,1} + \psi_{j,2} L(y - \alpha_j)].$$

Rien n'est changé dans nos raisonnements; la série asymptotique formée au moyen de $\varphi_j(y)$ est la somme de deux séries

$$P_j S_{j,1} + \frac{d}{d\lambda_j} (P_j S_{j,2}),$$

et l'on a

$$53) \quad f_j(x) = P_j \left[S_{j,1} + \frac{dS_{j,2}}{d\lambda_j} + S_{j,2} L^{\alpha_j} \frac{e^{i\pi}}{x} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

Mais comme λ_j est entier et négatif, les séries $S_{j,1}$ et $S_{j,2}$ sont limitées; il n'en est pas de même de la série $\frac{dS_{j,2}}{d\lambda_j}$; car les quantités $\frac{d}{d\lambda_j} (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + m)$ ne sont pas nulles quand $\lambda_j + m$ est positif.

Au chapitre I nous avons vu que si $\varphi_j(y)$ ne contient pas de logarithme, λ_j étant entier positif et supérieur à $p - 1$, la fonction $f_j(x)$ est définie par la formule 10),

$$10) \quad f_j(x) = \int_a^{\alpha_j} y^{x-1} \varphi_j(y) dy + \int_{L_0} y^{x-1} [c_1 V_1 + \dots + c_q V_q] dy.$$

La première intégrale est prise sur une courbe issue du point a et aboutissant en α_j ; les raisonnements faits au précédent chapitre sur les éléments de l'intégrale voisins de α_j doivent donc être modifiés.

Je suppose que la courbe $a\alpha_j$ soit la droite $a\alpha_j$, a étant un point de $O\alpha_j$ situé entre O et α_j ; soit m un point de cette portion de droite dont la distance au point α_j tend vers 0 comme $\varrho^{\beta-1}$, β étant un nombre positif inférieur à l'unité; en faisant toujours les mêmes changements de variable on constate que l'on peut écrire:

$$\int_{\alpha_j}^m y^{x-1} \varphi_j(y) dy = P_j \left[E_0^j + \frac{E_1^j}{x} + \dots + \frac{E_n^j}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant vers 0 quand σ est compris dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu\right)$; mais cette fois les coefficients E se déduisent des coefficients d de la série

$$d_0^j + \frac{d_1^j}{x} + \dots + \frac{d_n^j}{x^n}$$

formée au chapitre précédent en remplaçant dans ces derniers ζ^q par $\Gamma(\lambda_j + q + 1)$ et non plus par $(e^{2i\pi\lambda_j} - 1)\Gamma(\lambda_j + q + 1)$, quantité nulle dans le cas actuel; en tenant compte de cette modification dans la formation des coefficients E on constate que l'égalité 47) est encore vérifiée dans les mêmes conditions qu'au chapitre précédent.

Les fonctions $g(x)$ définies au chapitre I donnent lieu à une étude en tous points analogue à celle dont les fonctions f viennent d'être l'objet; mais le point x au lieu de rester constamment à droite de l'axe des ordonnées doit s'éloigner à l'infini en restant à gauche de ce même axe. Dans la formule 12) qui définit la fonction $g_j(x)$, on prend pour le contour L_∞ une circonférence de centre O et de rayon Oa , le point a étant situé sur le rayon $O\alpha_j$ entre α_j et l'infini; pour le contour L_j on prend le contour formé par la portion de droite am , m étant un point de $O\alpha_j$ de module supérieur à celui de α_j , la circonférence s_j de centre α_j et de rayon $\alpha_j m$, et la portion de droite ma . Quand le point x s'éloigne à l'infini avec un argument σ compris entre $\frac{\pi}{2} + \nu$ et $\pi - \nu$, on trouve alors

$$54) \quad g_j(x) = P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant uniformément vers 0; cette même égalité est vérifiée quand σ appartient à l'intervalle $\left(\pi + \nu, \frac{3\pi}{2} - \nu \right)$; si les fonctions w sont régulières à l'infini elle est encore vérifiée, quand σ appartient à l'intervalle $(\pi - \nu, \pi + \nu)$; si les fonctions w sont irrégulières à l'infini, elle n'est plus vraie dans cette intervalle que si l'on astreint le point x à s'éloigner à l'infini en restant à distance finie des pôles de $g_j(x)$.

D'une façon générale le développement asymptotique, trouvé pour la fonction $f_j(x)$ formée au moyen de la solution $\varphi_j(y)$ régulière au voisinage du point α_j racine de B_0 , quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées représente la fonction $g_j(x)$ formée avec la même solution $\varphi_j(y)$, quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à gauche du même axe.

V. Les solutions $f(x)$ sont indépendantes.

Les développements asymptotiques trouvés pour les diverses fonctions $f(x)$, solutions de l'équation aux différences finies formées au chapitre I, permettent de démontrer que ces fonctions sont indépendantes; autrement dit si $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$

sont les solutions de l'équation 1) correspondant aux racines α du polynome B_0 non nulles et au voisinage desquelles les solutions de l'équation 2) sont régulières, il est impossible de trouver des fonctions périodiques

$$T_1(x), T_2(x), \dots, T_p(x)$$

admettant pour période l'unité, et telles que la relation

$$T_1 f_1 + T_2 f_2 + \dots + T_p f_p = 0$$

soit identiquement satisfaite.

Supposons tout d'abord que toutes les racines α soient simples. Quand le point x s'éloigne à l'infini dans la direction des abscisses positives, en restant à distance finie des pôles des fonctions $f(x)$ on a :

$$f_j(x) = \frac{\alpha_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi(\lambda_j+1)}}{x^{\lambda_j+1}} [E_0^j + \varepsilon_j],$$

ε_j tendant vers 0; la constante E_0^j

$$E_0^j = \alpha_j^j (e^{2i\pi\lambda_j} - 1) \Gamma(\lambda_j + 1)$$

est sûrement différente de 0.

Posons alors

$$55) \quad x = x_1 + m,$$

m augmentant indéfiniment par valeurs entières et positives et x_1 étant un point différent des pôles des fonctions $f(x)$. Si l'on pouvait trouver des fonctions $T(x)$ admettant pour période l'unité et telles que la relation 55) soit satisfaite on aurait

$$57) \quad T_1(x_1) \frac{\alpha_1^{x+\lambda_1} e^{i\pi(\lambda_1+1)}}{x^{\lambda_1+1}} [E_0^1 + \varepsilon_1] + T_2(x_1) \frac{\alpha_2^{x+\lambda_2} e^{i\pi(\lambda_2+1)}}{x^{\lambda_2+1}} [E_0^2 + \varepsilon_2] + \dots \\ + T_p(x_1) \frac{\alpha_p^{x+\lambda_p} e^{i\pi(\lambda_p+1)}}{x^{\lambda_p+1}} [E_0^p + \varepsilon_p] = 0.$$

Soit α_1 celui des points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ dont le transformé α'_1 est tel que la projection de $O'\alpha'_1$ sur l'axe des abscisses est supérieure aux projections des vecteurs $O'\alpha'_2, \dots, O'\alpha'_p$. Je multiplie le premier membre de 57) par $\frac{x^{\lambda_1+1}}{\alpha_1^{x+\lambda_1} e^{i\pi(\lambda_1+1)}}$; il vient ainsi

$$T_1(x_1) [E_0^1 + \varepsilon_1] + \eta = 0,$$

η tendant vers 0 comme $e^{-h\eta^k}$, h et k étant positif. On en conclut que le produit $T_1(x_1) E_0^1$ est nul; on a donc :

Multipliant par $x^{j,l+1}$ il vient

$$T_{j,l}(x_1)[A_{j,l} + \varepsilon] + \eta' = 0,$$

η' tendant vers 0; or $A_{j,l}$ est une constante différente de 0.

On a donc

$$T_{j,l}(x) = 0$$

et la fonction $T_{j,l}$ est identiquement nulle.

En poursuivant ce raisonnement on démontrerait ainsi successivement que $T_{j,l-1}$, $T_{j,l-2}$, ... sont identiquement nuls; il tombe toutefois en défaut si plusieurs λ sont égaux; supposons que

$$i_{j,g} = i_{j,g-1} = \dots = i_{j,g-f+1} \neq i_{j,g-f}.$$

En multipliant par $x^{j,g+1}$, il vient

$$T_{j,g-f+1}[A_{j,g-f+1} + \varepsilon_{g-f+1}] + T_{j,g-f+2}[A_{j,g-f+2} + \varepsilon_{g-f+2}] + \dots + T_{j,g}[A_{j,g} + \varepsilon_g] + \eta'' = 0.$$

Mais on sait que:

$$\begin{aligned} A_{j,g} &= a_{j,g}^0 + a_{j,g}^1 Lx + \dots + a_{j,g}^{f-1} (Lx)^{f-1} \\ A_{j,g-1} &= a_{j,g-1}^0 + \dots + a_{j,g-1}^{f-2} (Lx)^{f-2} \\ &\dots \dots \dots \\ A_{j,g-f+1} &= a_{j,g-f+1}^0, \end{aligned}$$

$a_{j,g}^{f-1}$, $a_{j,g-1}^{f-2}$, ... $a_{j,g-f+1}^0$ étant des constantes surement différentes de 0; on voit donc que dans ce cas encore $T_{j,g}$, ... $T_{j,g-f+1}$ sont identiquement nuls.

En général le polynome B_0 admet r racines finies non nulles; si au voisinage de chacune de ces racines les solutions de 2) sont régulières on peut former r fonctions $f_j(x)$ solutions indépendantes de l'équation aux différences finies. Toute autre solution $f(x)$ de cette équation se met donc sous la forme:

$$f(x) = T_1 f_1 + T_2 f_2 + \dots + T_r f_r,$$

les T étant des fonctions périodiques admettant pour période l'unité.

En faisant augmenter m indéfiniment dans la formule 56) par valeurs entières et négatives, on démontrerait que les fonctions $g(x)$ forment également un système de solutions indépendantes de l'équation 1); si leur nombre est égal

à son ordre r , toute solution $f(x)$ pourra également se mettre sous la forme :

$$f(x) = T_1 g_1 + \dots + T_r g_r,$$

T_1, \dots, T_r étant des fonctions périodiques admettant pour période l'unité.

VI. Développements asymptotiques quand x s'éloigne à l'infini en restant sur l'axe des ordonnées où à gauche de cet axe.

Quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, chaque fonction $f(x)$ est représentée asymptotiquement par une série différentielle; il n'en est plus de même quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à gauche de ce même axe; nous étudierons tout d'abord le cas où σ voisin de

$\frac{\pi}{2}$ est compris entre $\frac{\pi}{2} - \nu$ et $\frac{\pi}{2} + \nu$.

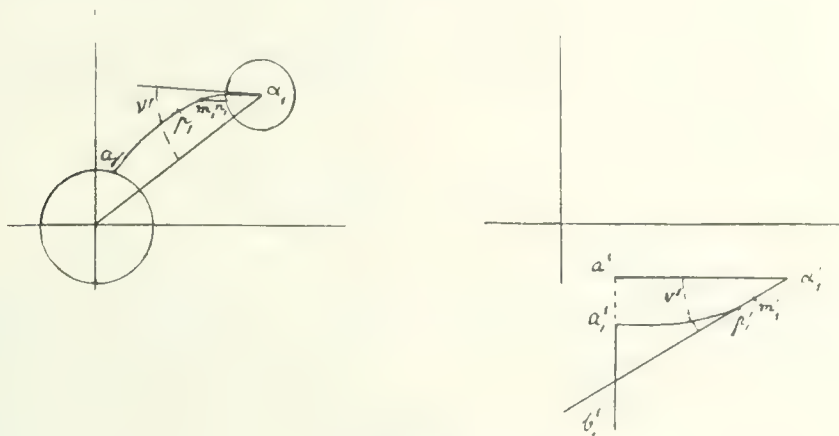


Figure 3.

Soit $f_1(x)$ la solution correspondant à la racine simple α_1 définie par la formule 7); le contour L_1 est défini comme au chapitre III; il se compose de la portion de droite an de la circonférence s_1 de centre α_1 et de la droite na ; le contour L_0 se compose du cercle de centre O et de rayon Oa ; je fais subir à ces deux contours les déformations suivantes: le point a vient en a_1 voisin de a sur la circonférence L_0 et du côté des arguments croissants; à partir de a_1 je trace une courbe C voisine de $O\alpha_1$, toute entière située par rapport à $O\alpha_1$ du côté des arguments croissants; partant de a_1 pour aboutir en p_1 voisin de α_1 , elle se termine par un arc de spirale joignant p_1 et α_1 ; cette spirale fait en α_1 avec le rayon $O\alpha_1$ un angle ν' . La transformée de la courbe C est dans le plan des z une courbe

C' voisine de la droite $a'_1 a'_1$, située toute entière au dessous de cette droite et se terminant par un segment rectiligne $p'_1 a'_1$ faisant avec $a'_1 a'_1$ le même angle ν' .

Dans la formule 7) définissant $f_1(x)$ le contour L_1 est formé par la courbe C parcourue depuis le point a_1 jusqu'au point m_1 compris entre p_1 et a_1 , par une petite portion de droite $m_1 n_1$, par la circonférence s_1 de centre α_1 et de rayon $\alpha_1 n_1$ parcourue en sens direct, par la portion de droite $n_1 m_1$ et la courbe C depuis m_1 jusqu'en a_1 . Le point m_1 se déplace sur la courbe C de telle sorte que sa distance au point α_1 tende vers 0 comme $\varrho^{\beta-1}$, β étant un nombre positif inférieur à l'unité convenablement choisi. Le contour L_0 se compose de la circonférence de centre O et de rayon Oa_1 parcourue en sens direct à partir de a_1 .

L'angle désigné par ϑ dans nos démonstrations est égal à $\pi - \nu_1$, ν_1 étant l'angle de $m_1 n_1$ avec $a_1 \alpha_1$.

On a donc:

$$\vartheta - \pi + \sigma = -\nu_1 + \sigma.$$

Or si

$$\frac{\pi}{2} - \nu < \sigma < \frac{\pi}{2} + \nu,$$

on a:

$$\frac{\pi}{2} - \nu - \nu_1 < \sigma - \nu_1 < \frac{\pi}{2} + \nu - \nu_1.$$

Mais ν_1 est voisin de ν' ; si ν' est supérieur à ν , le rapport de la portion d'intégrale prise sur le contour $m_1 n_1, s_1, n_1 m_1$ à la fonction P_1 est représenté asymptotiquement par la série de terme général $\frac{E_n^1}{x^n}$. Quand le point z parcourt la droite $p'_1 a'_1$, image de l'arc de spirale terminant la courbe C , la projection du vecteur $O'z$ sur les directions de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$ reste inférieure à la projection de $O'a'_1$. Il suffit de considérer la figure pour voir qu'il en est encore de même quand le point z décrit la ligne $b'_1 a'_1 p'_1$. L'égalité 47) subsiste donc, ε tendant uniformément vers 0, quand ϱ devient infini, σ appartenant à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$.

La déformation des contours L_0 et L_1 dont il vient d'être fait usage est toujours possible quand ν est suffisamment petit, à moins qu'entre O et α_1 se trouvent des points racines du polynôme B_0 . Dans ce cas pour que cette déformation soit possible, il faut que dans la définition primitive de $f_1(x)$ au moyen du contour an, s_1, na le point α_j situé entre O et α_1 sur la droite Oa_1 ait été

évitée par un demi cercle situé du côté des arguments croissants par rapport à $O\alpha_1$.

Si au contraire dans le contour primitif L_1 , le point α_j a été évité par un demi cercle situé du côté des arguments décroissants, la déformation est impossible; pour étudier le cas où σ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ on est alors conduit à déformer le contour primitif comme il est indiqué sur la figure; le contour L_1 se compose de la courbe $a_1 b_1 c_1$ du cercle s_j parcouru en sens direct, de la courbe $c_1 b_1 d_1$, du cercle s_1 parcouru en sens direct, de la courbe $d_1 b_1 c_1$, du cercle s_j parcouru en sens inverse et enfin de la courbe $c_1 b_1 a_1$.

Si α_j est une racine simple de B_0 , les solutions de l'équation différentielle 3) s'expriment linéairement au voisinage de ce point en fonction de $\varphi_j(y)$, solution régulière et holomorphe en α_j et des $p-1$ autres solutions holomorphes en ce point, correspondant aux racines entières de l'équation déterminante. En raisonnant sur le contour $b_1 c_1, s_j, c_1 b_1$ comme on a raisonné sur le contour $m_1 n_1, s_1, n_1 m_1$ on voit que

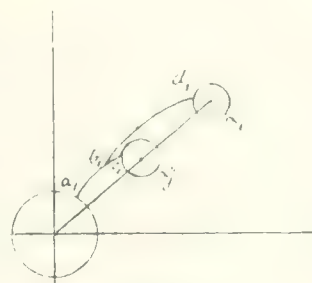


Figure 4.

$$\int_{L_j} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

A_j étant une constante et $\varepsilon_1, \varepsilon_j$ tendant uniformément vers 0 quand σ reste dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu \right)$.

Si entre O et α_1 , se trouvent sur la droite $O\alpha_1$, des points $\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{j+l}$, on aurait en raisonnant toujours de même

$$\int_{L_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + A_{j+l} P_{j+l} \left[S_{j+l} + \frac{\varepsilon_{j+l}}{x^n} \right].$$

On obtiendrait donc ainsi

$$60) \quad f_1(x) = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + A_j P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + A_{j+l} P_{j+l} \left[S_{j+l} + \frac{\varepsilon_{j+l}}{x^n} \right].$$

Les points $\alpha'_1, \alpha'_j, \dots, \alpha'_{j+l}$ transformés de $\alpha_1, \alpha_j, \dots, \alpha_{j+l}$, sont situés dans le plan des z sur une même parallèle à l'axe des abscisses; si la direction σ est à droite

de la direction positive de l'axe des ordonnées, les rapports $\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_1}\right)^x \dots \left(\frac{\alpha_{j+l}}{\alpha_1}\right)^x$ tendent vers 0, comme $e^{-h_0^k}$, h et k étant positif; si la direction σ est au contraire à gauche de cette direction ce sont les rapports $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+l}}\right)^x, \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+l}}\right)^x, \dots, \left(\frac{\alpha_{j+l-1}}{\alpha_{j+l}}\right)^x$ qui tendent vers 0 dans les mêmes conditions, α_{j+l} étant celui des points α , situé sur $O\alpha_1$ qui est le plus voisin de l'origine.

Il en résulte que dans le premier cas on a:

$$f_1(x) = \frac{\alpha_1^{j+l} e^{i\pi(j+l+1)}}{x^{j+l+1}} \left[E_0^{j+l} + \dots + \frac{E_n^{j+l}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

et dans le second:

$$(61) \quad f_1(x) = A_{j+l} \frac{\alpha_{j+l}^{x+j+l} e^{i\pi(j+l+1)}}{x^{j+l+1}} \left[E_0^{j+l} + \dots + \frac{E_n^{j+l}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] = A_{j+l} P_{j+l} \left[S_{j+l} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

La direction positive de l'axe des ordonnées forme donc coupure et la série représentant $f_1(x)$ change brusquement quand la direction σ sur laquelle le point x s'éloigne à l'infini passe de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2}\right)$ à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$. S'il s'éloigne sur la direction $\frac{\pi}{2}$ elle-même les modules de $\alpha_1^x, \alpha_j^x, \dots, \alpha_{j+l}^x$ sont égaux et la fonction $f_1(x)$ est représentée par l'égalité 60).

Le cas où σ est compris entre $-\frac{\pi}{2} - \nu$ et $-\frac{\pi}{2} + \nu$ se traite de façon analogue; au contour primitif L_1 on substitue un contour formé au moyen d'une courbe C située cette fois toute entière par rapport à $O\alpha_1$ du côté des arguments décroissants. La direction $-\frac{\pi}{2}$ n'est une coupure que si entre O et α_1 se trouve un point racine de B_0 , qui dans le contour primitif L_1 a été évité par une demi-circonférence située cette fois du côté des arguments croissants par rapport à $O\alpha_1$.

Par un procédé en tout point semblable à celui qui vient d'être appliqué à la fonction $f_1(x)$, on démontrerait que la fonction $g_1(x)$ est représentée asymptotiquement par

$$g_1(x) = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

quand la direction σ appartient à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu\right)$ ou à l'intervalle $\left(\frac{3\pi}{2} - \nu, \frac{3\pi}{2} + \nu\right)$; la direction positive ou la direction négative de l'axe des or-

données ne forme coupure que si entre le point α_1 et l'infini, se trouvent sur la droite $O\alpha_1$, un ou plusieurs points α racines de B_0 . On trouve ainsi un premier exemple d'une série

$$P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

qui, quand x s'éloigne à l'infini dans une des directions appartenant à un certain intervalle, à savoir l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} - \nu, \frac{\pi}{2} + \nu \right)$ représente deux fonctions distinctes à savoir $g_1(x)$ et $f_1(x)$.

Quand la direction $\frac{\pi}{2}$ ou la direction $-\frac{\pi}{2}$ forme coupure, nous avons été amené à supposer, que les solutions de 3) étaient régulières non seulement en α_1 , mais encore en tous les points α situés sur la droite $O\alpha_1$, que le contour primitif L_1 arrive à envelopper complètement dans la déformation qu'on est obligé de lui faire subir pour faire les démonstrations. Quand la direction σ appartient à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi \right)$ ou à l'intervalle $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2} - \nu \right)$ nous serons obligé également de déformer le contour primitif L_1 servant à définir la fonction $g_1(x)$, et nous serons amenés à supposer que tous les points α qu'il entoure complètement dans cette déformation sont tels que toutes les solutions de 3) y sont régulières. Ce sont là de nouvelles hypothèses qui n'intervenaient pas dans le cas où la direction σ était comprise dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + \nu, \frac{\pi}{2} - \nu \right)$, puisque les démonstrations relatives à la fonction $f_1(x)$ ne faisait intervenir qu'un seul des points α , à savoir le point α_1 qui sert à définir la fonction $f_1(x)$ elle-même.

Supposons tout d'abord que σ soit compris dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi \right)$; je trace une circonférence S ayant l'origine pour centre et de rayon supérieur à $O\alpha_1$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$ les points racines du polynôme B_0 situés à l'intérieur de cette circonférence et rangés dans l'ordre où les rencontre un rayon coïncidant d'abord avec $O\alpha_1$ et tournant autour de l'origine dans le sens direct; les arguments de $\alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$ sont respectivement,

$$\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_m,$$

n'allant jamais en décroissant et compris entre ω_1 et $\omega_1 + 2\pi$. Je désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m$ les points où la circonférence S rencontre les rayons $O\alpha_1, O\alpha_2, \dots, O\alpha_j, O\alpha_{j+1}, \dots, O\alpha_m$. Autour du point α_j avec α_j pour centre, je trace

une petite circonférence s_j qui coupe $O\alpha_j$ entre α_j et a_j en un point b_j . Je choisis alors pour contour L_1 , le contour formé par l'arc de circonférence a_2a_1 , la portion de droite a_1b_1 , le cercle s_1 parcouru en sens direct, la portion de droite b_1a_1 et l'arc a_1a_2 . Pour contour L_0 je choisis le contour formé par la portion de droite a_2b_2 la circonférence s_2 parcourue en sens inverse, la portion de droite b_2a_2 , l'arc $a_2a_3 \dots$ etc. ... la portion de droite a_jb_j , la circonférence s_j parcourue en sens inverse, la portion de droite b_ja_j , l'arc $a_ja_{j+1} \dots$ etc. ... la droite b_ma_m , l'arc a_ma_1 , la droite a_1b_1 , la circonférence s_1 parcourue en sens inverse, la droite b_1a_1 , l'arc a_1a_2 .

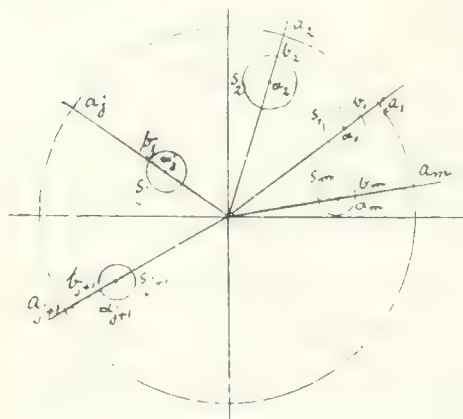


Figure 5.

Il est manifeste que par déformation continue les contours L_0 et L_1 , qui ont servi à définir la fonction $f_1(x)$ au chapitre III, peuvent se ramener aux deux contours de même nom qui viennent d'être définis. Ainsi la fonction $f_1(x)$ est encore définie par l'égalité 7) où L_0 et L_1 désignent les deux nouveaux contours. Je suppose tout d'abord que les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont simples.

Dans la transformation dont nous avons déjà fait plusieurs fois usage, l'arc a_2a_1 parcourue dans le sens a_2, a_1 devient une droite $a'_2a'_1$ parallèle à l'axe des ordonnées, dirigée dans le sens des ordonnées croissantes; la droite a_1a_1 devient une parallèle à l'axe des abscisses $a'_1a'_1$, le point a'_1 étant situé à gauche du point a'_1 . Quand le point z parcourt $a'_2a'_1b'_1$ la projection du vecteur $O'z$ sur les directions σ de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi\right)$ reste inférieure à la projection de $O'a'_1$. Il en résulte que dans l'intégrale sur le contour L_1 , seuls les éléments relatifs à la portion de ce contour voisine de α_1 donnent naissance à une série asymptotique à termes non nuls. Pour former cette dernière, on voit que dans le cas présent:

$$\vartheta = 0,$$

il vient alors:

$$\vartheta = \pi + \sigma = \sigma - \pi.$$

Or comme

$$\frac{\pi}{2} + \nu < \sigma < \nu,$$

on a:

$$\frac{A}{2} + \nu + \sigma = A + \sigma$$

et l'on conclut que

$$(62) \quad \int_{L_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right],$$

ε_1 tendant uniformément vers 0.

Considérons maintenant une intégrale de la forme

$$I_l = \int_{L_0} y^{x-1} v_l dy.$$

Le contour L_0 se décompose en plusieurs autres tels que

$$a_j b_j, s_j, b_j a_j, a_j a_{j+1}.$$

Or $a_j a_j$ a pour image une parallèle $a'_j a'_j$ à l'axe des abscisses, a'_j étant par rapport à a'_j du côté des abscisses négatives et $a_j a_{j+1}$ une parallèle $a'_j a'_{j+1}$ à l'axe des ordonnées, dirigée du côté des ordonnées négatives. Quand le point z décrit ces deux portions de droites, la projection du vecteur $O'z$ sur les directions de l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi\right)$ reste inférieure à la projection de $O'a'_j$. Seule la portion d'intégrale prise sur le cercle s_j donne naissance à une série asymptotique à termes non nuls. Au voisinage de a_j la fonction v_l s'exprime linéairement en fonction de $\varphi_j(y)$ et des $q-1$ autres solutions de l'équation 3) correspondant aux racines entières de l'équation déterminante; ces dernières, qui sont holomorphes, donnent des intégrales nulles et il n'y a plus finalement qu'à considérer

$$I_{l,j} = m_{l,j} \int y^{x-1} \varphi_j(y) dy,$$

l'intégrale étant prise sur s_j parcouru en sens inverse à partir de b_j et $m_{l,j}$ étant le coefficient de $\varphi_j(y)$ dans l'expression de v_l . Pour déterminer complètement ce coefficient, je suppose que dans $\varphi_j(y)$, l'argument de $y - a_j$ est ω_j , quand y vient en b_j , origine du contour s_j ; l'angle ϑ est donc nul; de plus $m_{l,j}$ n'est autre que le coefficient de $\varphi_j(y)$ dans l'expression de v_l au point b_j quand y partant de a_2 , point avec lequel est venu se confondre l'origine commune des contours L_0 et L_1 , décrit le contour L_0 dans le sens direct et vient une première fois en b_j avant d'avoir parcouru s_j .

Comme le contour s_j est parcouru en sens inverse, il vient:

$$63) \quad I_{l,j} = -m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right].$$

Si dans l'expression de v_l on avait pris le coefficient de $q_j(y)$ quand y vient en b_j , non plus avant d'avoir décrit la circonférence s_j en sens inverse, mais après avoir décrit cette circonférence, il faudrait remplacer $m_{l,j}$ par ce nouveau coefficient $m'_{l,j}$

$$64) \quad m'_{l,j} = m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j}.$$

Mais l'angle ϑ serait alors égal à 2π ; on aurait

$$\vartheta - \pi + \sigma = \sigma + \pi.$$

Comme $\sigma + \pi$ est compris entre $\frac{3\pi}{2} + \nu$ et 2π , il y aurait lieu de multiplier les coefficients E par $e^{2i\pi\lambda_j}$ et l'on aurait finalement

$$65) \quad I_{l,j} = -m'_{l,j} P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right]$$

expression identique à 63) en vertu de la relation 64).

Supposons plus généralement que le point y au lieu de parcourir seulement une fois le contour L_0 , parcourt ce contour K fois en sens direct; l'intégrale prise sur le contour $a_j b_j, s_j, b_j a_j, a_j a_{j+1}$ parcouru par le point y après que ce dernier ait effectué K révolutions autour de l'origine en décrivant L_0 est

$$\bar{I}_q^{(K)} = e^{2K\pi i x} \int y^{x-1} \bar{v}_l^{(K)} dy.$$

En désignant par $m_{l,j}^{(K)}$ le coefficient de $q_j(y)$ dans $\bar{v}_l^{(K)}$ défini comme il a été dit à propos de l'égalité 63), on a

$$\bar{I}_{l,j}^{(K)} = e^{2K\pi i x} m_{l,j}^{(K)} \int y^{x-1} q_j(y) dy,$$

d'où

$$66) \quad \bar{I}_{l,j}^{(K)} = -m_{l,j}^{(K)} e^{2i\pi(Kx-\lambda_j)} P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right].$$

Ce cas se présente pour le dernier contour partiel $a_1 b_1, s_1, b_1 a_1, a_1 a_2$. Finalement on voit que:

$$67) \int_{L_0} y^{x-1} v_l dy = - \left[m_{l,2} e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left(S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right) + \dots + m_{l,j} e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left(S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right) + \right. \\ \left. + m_{l,m} e^{-2i\pi\lambda_m} P_m \left(S_m + \frac{\varepsilon_m}{x^n} \right) + m_{l,1}^{(1)} e^{2i\pi(x-\lambda_1)} P_1 \left(S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right) \right].$$

On en conclut que :

$$68) \int_{L_0} y^{x-1} U dy = - \left[M_2 e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left(S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right) + \dots + M_j e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left(S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right) + \dots \right. \\ \left. + M_1^{(1)} e^{2i\pi(x-\lambda_1)} P_1 \left(S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right) \right],$$

en posant :

$$69) M_j = c_1 \gamma_{1,1} m_{1,j} + c_2 [\gamma_{2,1} m_{1,j} + \gamma_{2,2} m_{2,j}] + \dots + c_l [\gamma_{l,1} m_{1,j} + \dots + \gamma_{l,l} m_{l,j}] + \dots$$

Quand σ est compris dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \pi - \nu\right)$ les coefficients γ tendent vers 0 comme $e^{2i\pi x}$ à l'exception de ceux dont les deux indices sont égaux qui tendent vers -1 , les différences $\gamma_{l,l} + 1$ tendant vers 0 comme $e^{2i\pi x}$; il en résulte que M_j tend vers $-A_j$ et que l'on a

$$70) M_j = -A_j + \varepsilon$$

avec

$$71) A_j = c_1 m_{1,j} + c_2 m_{2,j} + \dots + c_q m_{q,j},$$

ε tendant vers 0 comme $e^{2i\pi x}$.

Il vient donc finalement

$$72) f_1(x) = P_1 \left(S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right) - \left[A_2 e^{-2i\pi\lambda_2} P_2 \left(S_2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right) + \dots + A_j e^{2i\pi\lambda_j} P_j \left(S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right) + \dots \right. \\ \left. + A_1^{(1)} e^{2i\pi(x-\lambda_1)} P_1 \left(S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right) \right].$$

Le coefficient A_j n'est autre que le coefficient de $q_j(y)$ dans l'expression de la fonction u , en fonction des solutions de 3) correspondant aux racines de l'équation déterminante relative au point a_j , quand y partant du point a vient en décrivant le contour L_0 , se confondre avec le point b_j ; ce coefficient est défini, comme a été défini le coefficient $m_{l,j}$ pour la fonction v_l .

On aurait pu définir la fonction $f_1(x)$ par la formule 22),

quand le point x s'éloigne avec un argument σ compris respectivement dans les intervalles:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \nu, \mu_f - \nu\right), (\mu_f + \nu, \mu_g - \nu), (\mu_g + \nu, \mu_h - \nu), \dots (\mu_j + \nu, \pi - \nu).$$

Les directions μ forment donc coupure; quand la direction σ passe d'un des angles qu'elles déterminent à l'angle voisin, la série représentant asymptotiquement une même fonction $f_1(x)$ change brusquement; si σ coïncide avec l'une de ces directions, μ_g par exemple, on a,

$$74) \quad f_1(x) = -A_f e^{-2i\pi\lambda_f} P_f \left[S_f + \frac{\varepsilon_f}{x^n} \right] - A_g e^{-2i\pi\lambda_g} P_g \left[S_g + \frac{\varepsilon_g}{x^n} \right].$$

Les points α auxquels correspondent des développements en séries, intervenant dans la représentation de $f_1(x)$ sont ceux dont les transformées α' sont les sommets du polygone convexe situés à gauche de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par α'_1 ; ils ont donc un module au plus égal à celui de α_1 ; dans les démonstrations le rayon du cercle S peut donc être pris arbitrairement pourvu qu'il soit supérieur au module de α_1 .

Dans le dernier intervalle $\mu_j + \nu, \pi - \nu$, la fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par la série relative au point α_j quand x s'éloigne à l'infini dans l'intervalle $(\pi - \nu, \pi)$ en restant toujours à distance finie des pôles des fonctions $f(x)$, les coefficients M restent finis et l'on a

$$75) \quad f_1(x) = -M_j e^{-2i\pi\lambda_j} P_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

ε tendant vers 0 sous la nouvelle condition que le point x reste à distance finie des pôles des fonctions f .

Le cas où σ est compris dans l'intervalle $\left(-\pi + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu\right)$ se traite de façon analogue au précédent. La fonction $f_1(x)$ est alors définie par la formule 23).

Le contour L_1 est formé par l'arc $a_m a_1$, parcouru en sens direct, la droite $a_1 b_1$, la circonférence s_1 , la droite $b_1 a_1$ et l'arc $a_1 a_m$. Le contour $-L_0$ a pour origine a_m ; il se compose de $a_m b_m, s_m$ en sens direct, $b_m a_m, a_m a_{m-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $a_1 b_1, s_1$ en sens direct, $b_1 a_1, a_1 a_m$. Ainsi tandis que dans le cas précédent le point a origine des contours primitifs L_0 et L_1 étant rejeté en a_2 , il est cette fois rejeté en a_m . On voit d'ailleurs immédiatement que les contours L_0 et L_1 primitifs ont été déformés sans que l'on traverse aucun des points singuliers des solutions de l'équation 3) et que la fonction $f_1(x)$ définie au moyen

des nouveaux contours par la formule 23) est bien la même que celle qui était définie au moyen des anciens.

Il suffit de considérer l'image du contour L_1 dans le plan des z pour voir que les seuls éléments de l'intégrale prise sur ce contour qui donnent naissance à une série à termes non nuls sont ceux qui sont voisins du point α_1 ; l'angle ϑ est égal à 2π ; on a

$$\vartheta - \pi + \sigma = \pi + \sigma.$$

Or

$$-\pi \leq \sigma < -\frac{\pi}{2} - \nu,$$

donc:

$$0 \leq \pi + \sigma < \frac{\pi}{2} - \nu,$$

et il vient:

$$76) \quad \int_{L_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right].$$

L'intégrale prise le long du contour $-L_0$ se décompose en intégrales partielles, chacune d'elles étant prise sur un contour tel que

$$a_j b_j, s_j, b_j a_j, a_j a_{j-1}.$$

Je désigne par $n_{l,j}$ le coefficient de $\varphi_j(y)$ dans l'expression au voisinage de α_j de la fonction v_l en fonction de $\varphi_j(y)$ et des $q-1$ autres solutions de l'équation 3) correspondant aux racines entières de l'équation déterminante, quand le point y partant de a_m et décrivant le contour $-L_0$ arrive en b_j avant d'avoir parcouru la circonférence s_j en sens direct. Le point y arrive ainsi en b_j avec l'argument $\omega'_j = \omega_j - 2\pi$. D'autre part dans l'expression de $\varphi_j(y)$, l'argument de $y - \alpha_j$ est ω_j ; il convient donc de prendre:

$$\vartheta = 2\pi,$$

et en posant:

$$\beta_j = \alpha_j e^{-2i\pi},$$

il vient:

$$77) \quad \int y^{x-1} v_l dy = n_{l,j} Q_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right],$$

avec

$$Q_j = \frac{\beta_j^{x+\lambda_j} e^{i\pi \lambda_j + 1}}{x^{\lambda_j + 1}}.$$

Si l'on avait pris dans l'expression de v_l au voisinage de a_j le coefficient de $q_j(y)$ quand le point y vient en b_j après avoir parcouru la circonférence s_j , il conviendrait de remplacer dans 77) n_j par n'_j ,

$$n'_j = n_j e^{2i\pi\lambda_j}.$$

Mais dans ce cas l'angle ϑ serait nul et l'on serait amené à multiplier les coefficients E^j dans S_j par $e^{-2i\pi\lambda_j}$ de telle sorte que l'on obtiendrait finalement le même développement.

Quand σ appartient à l'intervalle $\left(-\pi + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu\right)$ les coefficients γ tendent vers 0 comme $e^{-2i\pi\sigma}$; en poursuivant le raisonnement on trouve donc,

$$78) \quad f_1(x) = P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + B_m Q_m \left[S_n + \frac{\varepsilon_m}{x^n} \right] + \dots + B_j Q_j \left[S_j + \frac{\varepsilon_j}{x^n} \right] + \dots + B_1 Q_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon'_1}{x^n} \right],$$

B_j étant le coefficient de $q_j(y)$ dans l'expression de la fonction u en b_j quand y partant de a_m décrit le contour $-L_0$ pour arriver une première fois en b_j .

Les points β' images des points β se déduisent des points α' en augmentant de 2π les ordonnées de ces derniers; le polygone convexe ayant les points β' pour sommets les contenant à son intérieur se déduit du polygone des points α' par une translation d'amplitude 2π , dans le sens des ordonnées positives; son sommet inférieur est le point α'_1 . Je désigne par $\mu_h, \mu_l, \dots, \mu_s$ les arguments, correspondant aux directions des perpendiculaires aux côtés de ce polygone, compris dans l'intervalle $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$; l'argument μ_k correspond à la perpendiculaire au côté $\beta'_j \beta'_k$, l'argument μ_l à la perpendiculaire au côté $\beta'_k \beta'_l$ et ainsi de suite. On constate alors que quand σ reste compris dans les intervalles:

$$\left(-\pi + \nu, \mu_k - \nu\right), \left(\mu_k + \nu, \mu_l - \nu\right), \dots, \left(\mu_s + \nu, -\frac{\pi}{2} - \nu\right),$$

la fonction $f_1(x)$ est successivement représentée asymptotiquement dans chacun d'eux par,

$$79) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= B_j Q_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right], \\ f_1(x) &= B_k Q_k \left[S_k + \frac{\varepsilon}{x^n} \right], \\ &\dots \dots \dots \\ f_1(x) &= P_1 \left[S_1 + \frac{\varepsilon}{x^n} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où σ reste compris dans l'intervalle $(-\pi, -\pi + \nu)$ le point x restant toujours à distance finie des pôles des fonctions f , les coefficients γ restent finies et il vient

$$f_1(x) = N_j(x) Q_j \left[S_j + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant vers 0 sous la nouvelle condition que le point x reste à distance finie des pôles de $f_1(x)$.

Quand σ coïncide avec l'une des directions singulières μ , la fonction $f_1(x)$ est représentée par la somme des deux séries asymptotiques correspondant aux deux régions séparées par cette direction.

Il reste à examiner le cas où entre O et α_1 se trouvent sur la droite $O\alpha_1$ quelques points α . Pour appliquer les démonstrations précédentes il convient de se reporter à la définition primitive des contours L_0 et L_1 ; si dans la définition du contour L_1 qui a été donnée au chapitre III pour le cas, où la direction σ est à droite de l'axe des ordonnées, le point α a été évité au moyen d'une demi-circonférence située par rapport à $O\alpha_1$ du côté des arguments croissants, on voit que dans la déformation du contour L_0 tout se passe comme si le dernier point α_m que rencontre le rayon tournant en sens direct autour de l'origine à partir de $O\alpha_1$ pour revenir en $O\alpha_1$ était situé sur la droite $O\alpha_1$ elle-même; si au contraire le point α situé sur $O\alpha_1$ avait été évité par une demi-circonférence située par rapport à $O\alpha_1$ du côté des arguments décroissants, on le considérerait comme étant le premier point α que rencontre le rayon tournant autour de l'origine; tout se passerait comme si le point α_2 était venu sur la droite $O\alpha_1$. Il est manifeste que les directions $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ deviennent singulières dans les conditions mêmes qui ont été indiquées plus haut.

Nous venons d'obtenir les développements asymptotiques d'une même fonction $f_1(x)$ quand l'argument varie de $-\pi$ à $+\pi$. Si σ était compris entre $-\pi + 2K\pi$ et $\pi + 2K\pi$, K étant un entier positif ou négatif, l'angle $\vartheta - \pi + \sigma$ serait augmenté de $2K\pi$; les coefficients E seraient donc multipliés par $e^{2K\pi i \lambda_j}$; mais comme les facteurs P contiennent x^{λ} en dénominateur, les développements conserveraient finalement la même valeur. Ce résultat devait être prévu puisque la fonction $f(x)$ est uniforme.

Les directions singulières sont de deux sortes; ce sont d'abord la direction négative de l'axe des abscisses et quelquefois sa direction positive; ces deux singularités tiennent essentiellement à la façon dont sont disposés les pôles des fonctions $f(x)$; elles sont d'ailleurs communes à toutes ces fonctions. Les autres

directions singulières, celles des perpendiculaires au côté du polygone convexe ayant pour sommets les points α' ou les contenant à son intérieur, varient d'une fonction à l'autre. Ainsi la fonction $f(x)$ correspondant à la racine α la plus voisine de l'origine, n'en admet aucune, ou plutôt la seule qu'elle admette se confond avec la direction négative de l'axe des x . Tout au contraire les solutions qui correspondent aux autres racines α admettent en général deux ou plusieurs directions singulières μ . Ces directions découpent le plan en régions à l'intérieur desquels les restes ε tendent uniformément vers 0, si l'on en excepte la direction négative et quelquefois la direction positive de l'axe des abscisses. Ces restes ε se composent toujours de deux parties dont l'une tend vers 0 comme une puissance négative de ϱ et l'autre comme $e^{-h\varrho^k}$ h et k étant positifs; ils tendent donc vers 0 comme une puissance négative de ϱ .

Nous avons supposé que tous les points α intérieurs à la circonférence S sont des racines simples du polynome B_0 ; il est facile d'étendre les résultats obtenus au cas où quelques uns d'entre eux sont des racines multiples de ce polynome, pourvu que les solutions de l'équation 3) y soient toujours régulières.

Soit α_j une racine multiple d'ordre p du polynome B_0 jouissant de cette dernière propriété et soit une solution $f_1(x)$ de l'équation aux différences finies, formée au moyen de la fonction $\varphi_1(y)$ régulière au voisinage de la racine α_1 ; toutes les solutions de l'équation 3) s'expriment linéairement en fonction des p solutions $\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \dots, \varphi_{j,p}$ correspondant aux racines $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,p}$ en général non entières de l'équation déterminante relative à α_j et des $q-p$ autres solutions holomorphes correspondants aux racines $0, 1, \dots, q-p-1$ de cette même équation. Si le point α_1 a un module supérieur à celui de α_j , il se peut que le transformé α'_j de ce dernier soit un des sommets du polygone convexe ayant pour sommets ou comprenant à son intérieur les points α' , transformés des points α dont le module est inférieur à celui de α_1 . Il existe alors un angle sur les directions duquel le vecteur $O'\alpha'_j$ a une projection supérieure à celle des autres vecteurs $O'\alpha'$. Supposons qu'il soit situé au dessus de l'axe des abscisses; quand x s'éloigne à l'infini dans cet angle on a, soit

$$\begin{aligned} 80) \quad f_1(x) = & -A_{j,1} e^{-2i\pi\lambda_{j,1}} P_j^1 \left[S_j^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] - A_{j,2} e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 \left[S_j^2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] - \dots \\ & - A_{j,p} e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p \left[S_j^p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right], \end{aligned}$$

quand aucune des fonctions $\varphi_{j,i}$ ne contient de logarithme, soit

$$\begin{aligned}
81) \quad f_1(x) = & -A_{j,1} e^{-2i\pi\lambda_{j,1}} P_j^1 \left[S_{j,1}^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] \\
& -A_{j,2} \left[e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 S_{j,1}^2 + \frac{d}{d\lambda_{j,2}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} P_j^2 S_{j,2}^2) + P_j^2 e^{-2i\pi\lambda_{j,2}} \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] \\
& \dots \dots \dots \\
& -A_{j,l} \left[e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,1}^l + \frac{d}{d\lambda_{j,l}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,2}^l) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{d^{l-1}}{d\lambda_{j,l}^{l-1}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l S_{j,l}^l) + e^{-2i\pi\lambda_{j,l}} P_j^l \frac{\varepsilon_l}{x^n} \right], \\
& \dots \dots \dots \\
& -A_{j,p} \left[e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p S_{j,1}^p + \dots + \frac{d^{p-1}}{d\lambda_{j,p}^{p-1}} (e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p S_{j,p}^p) + e^{-2i\pi\lambda_{j,p}} P_j^p \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right],
\end{aligned}$$

si certaines des fonctions $\varphi_{j,l}$ contiennent des logarithmes. Quand l'angle est situé au dessous de l'axe des abscisses, aux égalités 80) et 81) se substituent respectivement les égalités

$$82) \quad f_1(x) = B_{j,1} Q_j^1 \left[S_j^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + B_{j,2} Q_j^2 \left[S_j^2 + \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] + \dots + B_{j,p} \left[S_j^p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right],$$

et

$$\begin{aligned}
83) \quad f_1(x) = & B_{j,1} Q_j^1 \left[S_{j,1}^1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] \\
& + B_{j,2} \left[Q_j^2 S_{j,1}^2 + \frac{d}{d\lambda_{j,2}} Q_j^2 S_{j,2}^2 + Q_j^2 \frac{\varepsilon_2}{x^n} \right] \\
& + \dots \dots \dots \\
& + B_{j,l} \left[Q_j^l S_{j,1}^l + \frac{d}{d\lambda_{j,l}} Q_j^l S_{j,2}^l + \dots + \frac{d^{l-1}}{d\lambda_{j,l}^{l-1}} Q_j^l S_{j,l}^l + Q_j^l \frac{\varepsilon_l}{x^n} \right] \\
& \dots \dots \dots \\
& + B_{j,p} \left[Q_j^p S_{j,1}^p + \dots + \frac{d^{p-1}}{d\lambda_{j,p}^{p-1}} Q_j^p S_{j,p}^p + Q_j^p \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right].
\end{aligned}$$

Dans les égalités 80) et 81) les constants $A_{j,1}, \dots, A_{j,p}$ sont les coefficients de $\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,p}$ dans l'expression de u

$$u = \bar{\varphi}_1(y) - \varphi_1(y)$$

au voisinage de α_j , le point y décrivant le chemin L_0 en sens direct comme il a été indiqué dans le cas où α_j est racine simple. Dans les égalités 82), 83) on a

$$Q_j^l = \frac{\beta_j^{x+\lambda_j, l} e^{i\pi(\lambda_j, l+1)}}{x^{\lambda_j, l+1}}$$

avec

$$\beta_j = \alpha_j e^{-2i\pi}$$

et les constantes $B_{j,1}, \dots, B_{j,p}$ sont les coefficients de $q_{j,1}, \dots, q_{j,p}$ dans l'expression de la fonction u au voisinage du point α_j quand le point y décrit le contour L_0 en sens inverse.

L'étude qui vient d'être faite sur les fonctions $f(x)$ quand le point x s'éloigne à l'infini avec un argument appartenant à l'un des deux intervalles $\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi, \pi + 2K\pi\right)$ ou $\left(-\pi + 2K\pi, -\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right)$, K étant entier pourrait être reproduite pour les fonctions g quand le point x s'éloigne à l'infini avec un argument compris entre $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$. Dans le cas de la fonction $f_1(x)$ nous avons pris pour former le contour L_0 une circonférence de rayon supérieur au module de α_1 ; dans le cas de la fonction $g_1(x)$ on prend pour former le contour L_∞ une circonférence de rayon inférieur au même module. Les points donnant naissance aux séries asymptotiques représentant la fonction $g_1(x)$ se trouvent parmi ceux dont le module est supérieur ou égal à celui de α_1 . Tandis que dans le cas des fonctions f les directions singulières a sont situées à gauche de l'axe des ordonnées, elles sont situées à droite du même axe dans le cas des fonctions $g(x)$.

En résumé à chaque racine finie, non nulle, du polynôme B_0 au voisinage de laquelle les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières, on a fait correspondre un nombre de fonctions f et de fonctions g , solutions de l'équation aux différences finies, égal à l'ordre de multiplicité de cette racine. On a formé les séries asymptotiques représentant chaque fonction $f_1(x)$, quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, et chaque fonction $g(x)$, quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à gauche de ce même axe; dans chacun de ces cas les seuls éléments des intégrales définissant les fonctions f ou g qui interviennent dans la formation de ces séries sont ceux qui sont voisins du point α auquel ces fonctions correspondent. On n'a d'ailleurs formé les séries asymptotiques, auxquelles ces éléments d'intégrale donnent naissance, qu'en supposant que les solutions de l'équation différentielle 3) sont régulières en ce point. Si le point x s'éloigne à l'infini en restant à gauche de l'axe des ordonnées les éléments d'intégrales définissant la fonction $f_j(x)$ correspondant au point α_j , qui interviennent dans la formation des séries asymptotiques représentant cette fonc-

tion, sont voisins de chacun des points α dont le module est au plus égal à celui de α_j . Admettant qu'en tous ces points α les solutions de 3) sont régulières, on a formé ces séries asymptotiques et l'on a ainsi obtenu l'ensemble des séries représentant chaque fonction f à l'infini. De même on a formé les séries asymptotiques représentant la fonction $g_j(x)$ quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, en supposant que les solutions de 3) sont régulières au voisinage des points α dont le module est au moins égal à α_j .

Le nombre des racines non nulles et finies du polynome B_0 est en général égal à l'ordre de l'équation aux différences finies; mais dans certains cas ce polynome peut admettre des racines nulles ou son degré peut s'abaisser; on peut rechercher ce que deviennent alors les fonctions f et g correspondant aux racines α qui deviennent ainsi nulles ou infinies et former les séries asymptotiques qui les représentent; ce cas particulièrement intéressant est celui des fonctions $\Gamma(x)$ et $\frac{1}{\Gamma(x)}$. La solution de ce nouveau problème dépend essentiellement de la nature des solutions de l'équation 3) au voisinage du point à l'infini ou de l'origine; quand elles sont représentées au voisinage de ces points par des séries asymptotiques normales de première espèce, on peut former en suivant toujours la même méthode des solutions de l'équation aux différences finies, qui, pour les grandes valeurs de la variable, sont représentées par des séries asymptotiques analogues aux séries bien connues qui représentent la fonction $\Gamma(x)$ et son inverse.



ORDRE DES POINTS SINGULIERS DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

PAR

EUGÈNE FABRY

À MONTPELLIER.

I. M. HADAMARD a défini l'ordre d'une série de Taylor $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, sur le cercle de convergence, dont le rayon est supposé égal à 1 (Journal de Math. pures et appliquées 1892, p. 165). Si la fonction $f(e^{i\vartheta})$ est finie et continue sur un arc C , c'est à dire entre deux valeurs de ϑ ; on dit qu'elle est à écart fini, si les modules des deux intégrales $\int n f(e^{i\vartheta}) \cos n\vartheta d\vartheta$ et $\int n f(e^{i\vartheta}) \sin n\vartheta d\vartheta$ restent inférieurs à un nombre I déterminé, sur l'arc C , et sur tout arc intérieur à C ; quelque soit n , qui peut augmenter indéfiniment.

Si $\varphi(z) = \sum \frac{a_n}{n^{\omega + \varepsilon}} z^n$ est à écart fini sur un arc C (ce qui suppose $\varphi(e^{i\vartheta})$ fini et continu), pour toute valeur positive de ε ; $\varphi(z)$ n'étant pas à écart fini lorsque $\varepsilon < 0$; ω est l'ordre de $f(z)$ sur cet arc. On en déduit l'ordre en un point du cercle de convergence, en supposant l'arc C infiniment petit. L'ordre sur le cercle de convergence est le plus grand des ordres en ses points singuliers, il est égal à la plus grande limite de $\frac{L|na_n|}{Ln}$. Nous supposerons cet ordre ω fini.

Dans les cas les plus simples, l'ordre en un point singulier est égal au degré d'infinitude. Mais M. BOREL a montré, par un exemple, que l'ordre peut être supérieur (Séries à termes positifs, p. 77). J'ai montré (C. R. 6 décembre 1909) qu'il était nécessaire de préciser ces définitions. Je me propose ici de définir, dans tous les cas, l'ordre d'infinitude en un point singulier, et l'ordre d'infinitude dans le cercle de convergence; et de montrer que ces deux définitions doivent reposer sur des principes différents. J'étudierai ensuite les divers cas qui peuvent se présenter, et les propriétés qui en résultent.

I. Ordre d'infinitude aux points singuliers.

2. Soit $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ une série dont le rayon de convergence est 1, et dont l'ordre, sur le cercle de convergence, est fini; c'est à dire que la plus grande limite ω de $\frac{L|na_n|}{Ln}$ n'est égale ni à $+\infty$, ni à $-\infty$.

Soit q un nombre réel, et $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe un nombre positif fixe A , tel que

$$a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \frac{a_3}{3^q} + \dots + \frac{a_n}{n^q} = S_n$$

ait un module inférieur à A , $|S_n| < A$, quelque soit n .

La série $\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right)$ est convergente. $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} = S_1 + \sum_2^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n^\varepsilon} = \sum_1^{\infty} S_n \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \right)$ est aussi une série convergente.

Inversement, si la série $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}}$ est divergente, les sommes S_n ne restent pas toutes finies.

Il existe donc un nombre p , tel que la série $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{p+\varepsilon}}$ soit convergente, pour toute valeur positive de ε ; et que les sommes $\sum_1^n \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}}$ ne restent pas finies; de sorte que la série $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}}$ est divergente.

A toute valeur positive de ε correspond un rang à partir duquel on a $|a_n| < n^{\omega-1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc la série $\sum \frac{a_n}{n^{\omega+\varepsilon}}$ est convergente. D'autre part, il y a une infinité de termes tels que $|a_n| > n^{\omega-1-\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc, la série $\sum \frac{a_n}{n^{\omega-1-\varepsilon}}$ est divergente. Il en résulte:

$$\omega - 1 < p \leq \omega.$$

3. Supposons encore $|S_n| < A$, quelque soit n ;

$$z = \varrho e^{\theta i}, \quad 0 < \varrho < 1, \quad \left| \frac{\theta}{1 - \varrho} \right| < k, \quad k \text{ fixe.}$$

De sorte que le point z peut se rapprocher de $z = 1$, par un contour intérieur, et non tangent, au cercle de convergence, mais formant avec la tangente au cercle un angle aussi petit que l'on voudra, si le nombre fixe k est choisi assez grand. Nous allons étudier l'ordre de grandeur du produit $(1 - z)^q f(z)$, en supposant $q \geq 0$. On a :

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = a_0 + \sum_1^\infty (S_n - S_{n-1}) n^q z^n = a_0 + \sum_1^\infty S_n [n^q z^n - (n+1)^q z^{n+1}]$$

puisque $S_n n^q z^n$ tend vers zéro, pour $n = \infty$, si $\varrho < 1$.

$$f(z) = a_0 + (1 - e^{\theta i}) \sum_1^\infty S_n n^q \varrho^n e^{n \theta i} + \sum_1^\infty S_n [n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}] e^{(n+1) \theta i}$$

$$|f(z)| < |a_0| + 2A \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \left[\sum_1^\infty n^q \varrho^n + A \sum_1^\infty |n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}| \right].$$

$n^q \varrho^n$ augmente d'abord avec n , puis diminue lorsque $n > \frac{q}{-L\varrho}$, ou $\varrho^n < e^{-q}$. Soit N le nombre entier pour le quel $n^q \varrho^n$ a la plus grande valeur

$$\frac{q}{L\varrho} - 1 < N < \frac{q}{L\varrho} + 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_1^{N-1} ((n+1)^q \varrho^{n+1} - n^q \varrho^n) &= N^q \varrho^N - \varrho \\ \sum_N^{\infty} (n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}) &= N^q \varrho^N \\ \sum_1^{\infty} |n^q \varrho^n - (n+1)^q \varrho^{n+1}| &= 2N^q \varrho^N - \varrho < 2 \left(\frac{q}{-eL\varrho} \right)^q \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_1^{N-1} n^q \varrho^n &< \int_1^N x^q \varrho^x dx \\ \sum_{N+1}^{\infty} n^q \varrho^n &< \int_N^{\infty} x^q \varrho^x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} n^q \varrho^n &< N^q \varrho^N + \int_0^{\infty} x^q \varrho^x dx = N^q \varrho^N + \int_0^{\infty} \frac{x^q e^{-x} dx}{(-L\varrho)^{q+1}} = \\ &= N^q \varrho^N + \frac{\Gamma(q+1)}{(-L\varrho)^{q+1}} < \left(\frac{1}{-L\varrho}\right)^q \left[\left(\frac{q}{e}\right)^q + \frac{\Gamma(q+1)}{-L\varrho}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(z)| &< |a_0| + A|\vartheta| \left(\frac{1}{L\varrho}\right)^q \left[\left(\frac{q}{e}\right)^q - \frac{\Gamma(q+1)}{L\varrho}\right] + 2A \left(\frac{q}{-eL\varrho}\right)^q \\ (1-\varrho)^q |f(z)| &< |a_0| (1-\varrho)^q + Ak \left[\left(\frac{q}{e}\right)^q (1-\varrho) + \Gamma(q+1)\right] + 2A \left(\frac{q}{e}\right)^q. \end{aligned}$$

Le produit $(1-\varrho)^q |f(z)|$ reste inférieur à un nombre fixe, lorsque $|z| = \varrho$ tend vers 1.

$$\left| \frac{1-z}{1-\varrho} \right| = \sqrt{1 + \frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} < \sqrt{1 + \varrho k^2}.$$

Done, le produit $(1-z)^q f(z)$ a aussi un module qui reste fini. Le produit $(1-z)^{q+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro, si z tend vers 1, par un contour non tangent au cercle de convergence.

4. Supposons q négatif: $-\lambda \leq q < 1-\lambda$, λ étant un nombre entier positif, et S_n restant fini (n° 2). La série $\sum n^{-q-\varepsilon} a_n$ sera convergente. Nous supposons:

$$\sum_0^{\infty} a_n = 0, \quad \sum_1^{\infty} n a_n = 0, \quad \sum_1^{\infty} n^2 a_n = 0, \quad \dots \quad \sum_1^{\infty} n^{\lambda-1} a_n = 0.$$

C'est à dire que $f(z)$ est nul, pour $z=1$, ainsi que ses $\lambda-1$ premières dérivées. On peut toujours remplir ces conditions en ajoutant à $f(z)$ un polynôme de degré $\lambda-1$. On a alors:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n = \sum_0^{\infty} a_n (z^n - 1) = (z-1) \sum_1^{\infty} a_n (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}).$$

Posons:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_0^{\infty} b_n z^n$$

$$b_n = -a_{n+1} - a_{n+2} - \dots = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

On a:

$$\sum_0^{\infty} b_n = - \sum_0^{\infty} n a_n = 0, \quad \text{si } \lambda > 1$$

$$\sum_0^{\infty} n b_n = - \sum_1^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} a_n = 0, \quad \text{si } \lambda > 2$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\sum_0^{\infty} n^{\lambda-2} b_n = - \sum_2^{\infty} a_n (1 + 2^{\lambda-2} + 3^{\lambda-2} + \dots + (n-1)^{\lambda-2}) = 0$$

car le coefficient de a_n est égal à un polynôme en n de degré $\lambda-1$; et cette série est une combinaison linéaire des λ séries supposées nulles.

D'autre part, on a:

$$\sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} = - \sum_{n=2}^m a_n \left(1 + \frac{1}{2^{q+1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{q+1}} \right) - \left(1 + \frac{1}{2^{q+1}} + \dots + \frac{1}{m^{q+1}} \right) \sum_{m+1}^{\infty} a_n.$$

Et comme $a_n = n^q (S_n - S_{n-1})$, $|S_n| < A$

$$\begin{aligned} \sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} &= 2^q S_1 + \sum_2^m S_n \left[(n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}} \right] - \\ &- \left[S_{m+1}((m+1)^q - (m+2)^q) + S_{m+2}((m+2)^q - (m+3)^q) + \dots \right] \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}}. \end{aligned}$$

Cette expression reste finie, quelque soit m . En effet, si $0 > q \geq -1$, on a:

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \int_0^m \frac{dx}{x^{q+1}} = -\frac{1}{q m^q}.$$

La fonction $(1+x)^q - 1 - qx$ augmente avec x , à partir de $x=0$. Si $x = \frac{1}{n}$, on a:

$$0 < n^q - (n+1)^q < -q n^{q-1}$$

$$(n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}} = \frac{1}{n} - \left[n^q - (n+1)^q \right] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} > 0.$$

Le coefficient de S_n étant positif, on a:

$$\left| \sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} \right| < 2A(m+1)^q \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{2A}{-q} \left(\frac{m+1}{m} \right)^q < \frac{2A}{-q}.$$

Si $q < -1$, on a:

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < \int_0^{m+1} \frac{dx}{x^{q+1}} = -\frac{1}{q(m+1)^q}$$

$$\sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} > \int_0^m \frac{dx}{x^{q+1}} = \frac{1}{qm^q}$$

$$-qn^{q-1} > n^q - (n+1)^q > -qn^{q-1} - \frac{q(q-1)}{2} n^{q-2}.$$

On en déduit:

$$[n^q - (n+1)^q] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q < \frac{1}{n} - \frac{q}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q$$

$$[n^q - (n+1)^q] \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} > \frac{1}{n} - \frac{1-q}{2n^2} > \frac{1}{n} + \frac{q}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q$$

puisque $0 > \frac{q-1}{2} > q$ et $\left(\frac{n}{n+1} \right)^q > 1$,

$$\frac{q}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q < (n+1)^q \sum_1^n \frac{1}{n^{q+1}} - n^q \sum_1^{n-1} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{-q}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q$$

$$\left| \sum_1^m \frac{b_n}{n^{q+1}} \right| < -Aq \sum_1^m \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q + A(m+1)^q \sum_1^m \frac{1}{n^{q+1}} < -\frac{A}{q} - Aq \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q$$

$g(z)$ est nul, pour $z=1$, ainsi que ses $\lambda-1$ premières dérivées, et les sommes

$\sum_1^n \frac{b_n}{n^{q+1}}$ restent finies.

En répétant λ fois les mêmes transformations, on peut poser:

$$\frac{f(z)}{(1-z)^\lambda} = \sum_0^\infty b_n z^n$$

les sommes $\sum_1^n \frac{b_n}{n^{q+\lambda}}$ restant finies. Et comme $q+\lambda \geq 0$, le produit $(1-q)^q f(z)$

reste fini, ainsi que $(1-z)^q f(z)$, lorsque z tend vers 1, par un contour intérieur, et non tangent, au cercle de convergence. $(1-z)^{q+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro.

5. q étant positif, et $0 < \varepsilon < q$, supposons que l'on ait, pour toute valeur de z telle que $|z|=q < 1$:

$$(1-q)^{q-\varepsilon} \left| \sum_0^r a_n z^n \right| < A.$$

Il résulte d'un théorème de Cauchy que l'on a:

$$(1-q)^{q-\varepsilon} |a_n| q^n < A.$$

J'ai donné une généralisation de ce théorème (C. R. 8 novembre 1909), en montrant que, quels que soient n et λ , on a :

$$(1-q)^{q-\varepsilon} |a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + \dots + a_{n+\lambda} q^{n+\lambda}| < 2A \left(1 + \frac{L(\lambda+1)}{\lambda}\right) < A' L(\lambda+1)$$

$$A' = 2A \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{L2}\right), \quad \lambda > 0.$$

Posons :

$$T_\lambda = a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + \dots + a_{n+\lambda} q^{n+\lambda}$$

et

$$\begin{aligned} U &= \frac{a_n}{n^q} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)^q} + \dots + \frac{a_{n+\lambda}}{(n+\lambda)^q} = \frac{T_0}{n^q q^n} + \frac{T_1 - T_0}{(n+1)^q q^{n+1}} + \dots + \frac{T_\lambda - T_{\lambda-1}}{(n+\lambda)^q q^{n+\lambda}} - \\ &= T_0 \left(\frac{1}{n^q q^n} - \frac{1}{(n+1)^q q^{n+1}} \right) + \dots + T_{\lambda-1} \left(\frac{1}{(n+\lambda-1)^q q^{n+\lambda-1}} - \frac{1}{(n+\lambda)^q q^{n+\lambda}} \right) + \\ &\quad + T_\lambda \frac{1}{(n+\lambda)^q q^{n+\lambda}}. \end{aligned}$$

$n^q q^n$ augmente avec n , si $n > \frac{q}{-Lq}$. Prenons $q = e^{-\frac{q}{n+\lambda}}$. Les coefficients de T_0 ,

T_1, \dots, T_n sont tous positifs, et ont pour somme $\frac{1}{n^q q^n}$.

$$|T_0| = |a_n| q^n < \frac{A'}{(1-q)^{q-\varepsilon}}, \quad |T_\lambda| < \frac{A'}{(1-q)^{q-\varepsilon}} L(\lambda+1)$$

$$|U| < \frac{A' L(\lambda+1)}{n^q q^n (1-q)^{q-\varepsilon}}.$$

$\frac{1-e^{-x}}{x}$ diminue, si x augmente à partir de zéro. Si $n+\lambda \geq 1$, on a :

$$1-q = 1 - e^{-\frac{q}{n+\lambda}} \geq \frac{1-e^{-q}}{n+\lambda}$$

$$q^n = e^{-q \frac{n}{n+\lambda}} > e^{-q}.$$

$$|U| < \frac{A' e^q}{(1-e^{-q})^q} \left(\frac{n+\lambda}{n} \right)^q \frac{L(\lambda+1)}{(n+\lambda)^\varepsilon}.$$

Si $\lambda \leq n$, $|U| < A'' \frac{L(\lambda+1)}{(n+\lambda)^\varepsilon}$, où A'' reste fixe. Décomposons U en une suite de

sommes de termes successifs commençant aux valeurs $n_0 = n$, $n_1 = 2n$, $n_2 = 2^2n$, ..., $n_{r-1} = 2^{r-1}n$, $n + \lambda < 2^r n$. On aura :

$$|U| < \frac{A''}{(2n)^\varepsilon} \left(\frac{Ln}{1} + \frac{Ln + L2}{2^\varepsilon} + \frac{Ln + 2L2}{2^{2\varepsilon}} + \dots + \frac{Ln + (r-1)L2}{2^{(r-1)\varepsilon}} \right) < \\ < \frac{A''}{n^\varepsilon} \left(\frac{Ln}{2^\varepsilon - 1} + \frac{L2}{(2^\varepsilon - 1)^2} \right) < \frac{A''}{2^\varepsilon - 1} \left(\frac{1}{e\varepsilon} + \frac{L2}{2^\varepsilon - 1} \right) < \frac{A''}{\varepsilon^2 L2} \left(1 + \frac{1}{e} \right).$$

U reste fini, quels que soient n et λ .

Inversement, si les sommes $S_n = a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \dots + \frac{a_n}{n^q}$ ne restent pas finies; c'est à dire s'il existe des valeurs de n telles que $|S_n|$ soit plus grand qu'un nombre donné quelconque, le produit $(1-\varrho)^{q-\varepsilon} \sum_0^\infty a_n z^n$ aura un module qui peut dépasser tout nombre donné à l'intérieur du cercle de convergence. Le module de $(1-z)^{q-\varepsilon} \sum_0^\infty a_n z^n$ pourra également dépasser tout nombre donné.

6. Supposons que $z=1$ soit le seul point singulier du cercle de convergence, $f(z)$ reste fini dans la portion du cercle de convergence extérieure à un cercle de centre 1, de rayon aussi petit que l'on voudra. Supposons, en outre, $p > 0$ (n° 2). Le module de $(1-z)^{p-\varepsilon} f(z)$ peut dépasser tout nombre donné dans la partie du cercle de convergence intérieure à un cercle de centre 1, de rayon aussi petit que l'on voudra. D'autre part $(1-z)^{p+\varepsilon} f(z)$ tend vers zéro (n° 3) pour $z=1$, sur tout contour non tangent au cercle de convergence. Il semble naturel de considérer p comme l'ordre d'infinitude de $f(z)$ au point singulier $z=1$. Cependant il peut arriver que $(1-z)^{p-\varepsilon} f(z)$ ne devienne infini que pour des contours tangents au cercle de convergence, et tende vers zéro pour tout contour non tangent au point 1. D'autre part, si on développe $f(z)$ dans un cercle tangent intérieurement au premier, au point 1, il peut arriver que le nombre p diminue. Il est donc nécessaire d'examiner les conditions où cette définition sera précise.

Pour évaluer l'ordre d'infinitude au point 1, si on ne prend que des contours non tangents au cercle de convergence, l'ordre sera au plus égal à p .

7. Soit, en général, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1-z} = \sum_0^\infty b_n z^n$$

$$b_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Soit ω l'ordre de $f(z)$, sur le cercle de convergence, c'est à dire la plus grande limite de $\frac{L|na_n|}{Ln}$; et Ω l'ordre de $q(z)$, ou la plus grande limite de $\frac{L|nb_n|}{Ln}$.

On a $\omega < \Omega$.

En effet, au nombre ε correspond un rang à partir du quel on a :

$$|b_n| < n^{\Omega-1+\varepsilon}$$

$$|a_n| = |b_n - b_{n-1}| < 2n^{\Omega-1+\varepsilon}, \text{ ou } < 2(n-1)^{\Omega-1+\varepsilon},$$

suivant le signe de l'exposant $\Omega-1+\varepsilon$. Comme $\frac{L(n-1)}{Ln}$ tend vers 1, on a, dans tous les cas: $\omega \leq \Omega$.

Si $\omega \geq 0$, on a $\Omega \leq \omega + 1$. En effet, au nombre ε correspond un rang q tel que

$$|a_n| < n^{\omega-1+\varepsilon}, \text{ si } n > q$$

$$b_n = b_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \dots + a_n$$

$$|b_n| < |b_q| + (q+1)^{\omega-1+\varepsilon} + (q+2)^{\omega-1+\varepsilon} + \dots + n^{\omega-1+\varepsilon}.$$

Comme $\omega + \varepsilon > 0$, quelque soit le signe de $\omega + \varepsilon - 1$, on a :

$$|b_n| < |b_q| + \int_0^{n+1} x^{\omega-1+\varepsilon} dx = |b_q| + \frac{(n+1)^{\omega+\varepsilon}}{\omega+\varepsilon}$$

$$|nb_n| < n^{\omega+1+\varepsilon} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\omega+\varepsilon} \left(\frac{1}{\omega+\varepsilon} + \frac{|b_q|}{(n+1)^{\omega+\varepsilon}} \right).$$

Si, ε et q restant fixes, n augmente indéfiniment, on voit que $\Omega \leq \omega + 1 + \varepsilon$, quelque soit ε . Donc: $\Omega \leq \omega + 1$.

Si $\omega < 0$, à partir d'un rang déterminé $|a_n| < n^{\omega-1+\varepsilon}$. On peut supposer $\omega + \varepsilon < 0$; donc la série $\sum_0^\infty a_n$ est convergente, et $b_n = \sum_0^n a_n$ a une limite déterminée, pour $n = \infty$. Supposons cette limite nulle, ou

$$f(1) = \sum_0^\infty a_n = 0.$$

Alors

$$b_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = -a_{n+1} - a_{n+2} - \dots$$

A partir d'une valeur déterminée de n , on aura:

$$|b_n| < \sum_{n+1}^{\infty} n^{\omega-1+\varepsilon} < \int_n^{\infty} x^{\omega-1+\varepsilon} dx = -\frac{n^{\omega+\varepsilon}}{\omega+\varepsilon}.$$

On a encore $\Omega \leq \omega + 1$. Mais il suffirait de changer la valeur de a_0 , ou d'ajouter une constante à $f(x)$, pour avoir $\Omega = 1$.

Ainsi, à condition que $f(1) = 0$, lorsque $\omega < 0$, on a, dans tous les cas:

$$\omega \leq \Omega \leq \omega + 1.$$

8. On a:

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + \frac{a_2}{2^q} + \dots + \frac{a_n}{n^q} = -b_0 + b_1 \left(1 - \frac{1}{2^q}\right) + \dots + b_{n-1} \left(\frac{1}{(n-1)^q} - \frac{1}{n^q}\right) + \frac{b_n}{n^q}.$$

Soit $q - \Omega + 1 = 2\varepsilon > 0$. Si n est assez grand, on a: $|b_n| < n^{\Omega-1+\varepsilon}$, $\left|\frac{b_n}{n^q}\right| < \frac{1}{n^\varepsilon}$, $\frac{b_n}{n^q}$ tend vers zéro, pour $n = \infty$.

$$b_n \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}\right) = \frac{b_n}{n^{q+1}} q \left(1 - \frac{q+1}{2n} + \frac{(q+1)(q+2)}{2 \cdot 3 n^2} - \dots\right)$$

La série $\sum \frac{b_n}{n^{q+1}}$ est convergente, ainsi que la série $\sum \frac{a_n}{n^q}$. Si p est le nombre défini au n° 2, on a:

$$p \leq \Omega - 1.$$

D'autre part, supposons que q ait une valeur positive; et que $|S_n| < A$, quelque soit n . On aura:

$$b_n = \sum_0^n a_n = a_0 + n^q S_n + \sum_1^{n-1} S_n (n^q - (n+1)^q)$$

$$|b_n| < A + A n^q + A \sum_1^{n-1} ((n+1)^q - n^q) = 2A n^q.$$

Donc:

$$\Omega \leq q + 1.$$

Si p est positif ou nul, $\Omega \leq p + 1$. Par suite:

$$\Omega = p + 1.$$

Si p est négatif, nous supposons $\sum_0^\infty a_n = 0$. Soit $p < q < 0$; on aura :

$$b_n = \sum_0^n a_n = - \sum_{n+1}^\infty a_n = \sum_{n+1}^\infty (S_{n-1} - S_n) n^q = (n+1)^q S_n - \sum_{n+1}^\infty S_n (n^q - (n+1)^q)$$

car $n^q S_n$ tend vers zéro, pour $n = \infty$. Il existe un nombre A , tel que $|S_n| < A$, quelque soit n , et $|b_n| < 2A(n+1)^q$.

On a encore $\Omega \leq p+1$, et $\Omega = p+1$.

Dans tous les cas, à condition que $f(1) = 0$ lorsque $p < 0$, on a $p = \Omega - 1$.

Mais, lorsque $p < 0$, il suffirait d'ajouter une constante à $f(z)$ pour avoir $\Omega = 1 > p+1$.

A la fonction $\frac{f(z)}{1-z}$ correspond un nombre $P \leq \Omega$. Mais il peut arriver que l'on ait $P < \Omega$, ainsi que nous en donnerons un exemple.

g. Soit p le nombre défini au n° 2, qui peut être positif, négatif, ou nul. Supposons $p > \omega - \frac{1}{2}$.

Soit

$$q > \omega - \frac{1}{2} \text{ et } \varepsilon = \frac{q - \omega}{2} + \frac{1}{4} > 0.$$

Soit x un nombre réel, $0 < x < 1$ et $\frac{z-x}{1-x} = y$. Formons le développement :

$$f(z) = f(x + y(1-x)) = \sum_0^\infty y^n \frac{(1-x)^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(x) = \sum_0^\infty b_n y^n.$$

Si $z = 1$ est un point singulier, le rayon de convergence est encore 1. Soit :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{m^q} = \sum_1^n \frac{(1-x)^m}{m^q} \sum_{v=m}^\infty x^{v-m} a_v \frac{v(v-1) \cdots (m+1)}{1 \cdot 2 \cdots (v-m)} \\ &= \sum_{v=1}^\infty x^v a_v \left(\frac{v}{1} \frac{1-x}{x} + \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 \frac{1}{2^q} + \cdots + \frac{v(v-1) \cdots (v-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} \left(\frac{1-x}{x} \right)^n \frac{1}{n^q} \right). \end{aligned}$$

Nous allons étudier l'ordre de grandeur de T_n , en supprimant des termes dont la somme restera finie, quelque soit n . A partir d'une valeur déterminée de n ,

on a $|a_n| < n^{\omega-1+\varepsilon} = n^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Les coefficients $\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu$ augmentent avec μ , tant que $\mu < (1-x)(\nu+1)$. Supposons cette condition remplie, et ν assez grand. Posons alors:

$$t = |a_\nu| x^\nu \sum_1^\mu \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \frac{1}{\mu^q} < \\ < \nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} x^\nu \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\mu+1)}{1\cdot 2\cdots\mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \sum_1^\mu \frac{1}{\mu^q}.$$

$$\text{Si } q > 1, \sum_1^\mu \frac{1}{\mu^q} < \sum_1^\infty \frac{1}{\mu^q} \text{ reste fini.}$$

$$\text{Si } q < 1, \sum_1^\mu \frac{1}{\mu^q} < \int_0^{\mu+1} \frac{dx}{x^q} = \frac{(\mu+1)^{1-q}}{1-q}.$$

$$\text{Si } q = 1, \sum_1^\mu \frac{1}{\mu} < 1 + \int_1^\mu \frac{dx}{x} = 1 + \bar{L}_1 \mu.$$

Le rapport $\frac{1\cdot 2\cdots n}{(n!)^n \sqrt{2\pi n}}$ tend vers 1, pour $n = \infty$. Il en résulte que

$$\frac{1\cdot 2\cdots \nu}{1\cdot 2\cdots \mu \cdot 1\cdot 2\cdots(\nu-\mu)} < A \left(\frac{\nu}{\nu-\mu}\right)^\nu \left(\frac{\nu-\mu}{\mu}\right)^\mu \sqrt{\frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)}},$$

A restant fixe, quels que soient les nombres entiers ν et μ , $\nu > \mu$. Et:

$$t < A \nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(\frac{\nu x}{\nu-\mu}\right)^\nu \left(\frac{\nu-\mu}{\mu} \frac{1-x}{x}\right)^\mu \sqrt{\frac{\nu}{\mu(\nu-\mu)}} \mu^\alpha,$$

où A est un autre nombre fixe; $\alpha = 0$ si $q > 1$, $\alpha = 1 - q$ si $q < 1$, et $\alpha = \varepsilon$ si $q = 1$.

Soit $\mu = \nu(1-x) - h$, $\frac{h}{\nu}$ tendant vers zéro, pour $\nu = \infty$. On aura:

$$t < A \nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(1 + \frac{h}{\nu x}\right)^{-\nu x - h} \left(1 - \frac{h}{\nu(1-x)}\right)^{h - \nu(1-x)} \mu^{\alpha - \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \\ = A \nu^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} \mu^{\alpha - \frac{1}{2}} e^{-\frac{h^2}{2\nu x(1-x)} + \frac{h^3(1-2x)}{6\nu^2 x^2(1-x)^2} - \cdots}$$

Si $h \geq \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r}$, cette expression est de la forme

$$A' r^{q-1-\varepsilon+\alpha-\frac{K}{2x(1-x)}}$$

qui sera le terme général d'une série convergente, si K est choisi assez grand.

Il suffit que $\frac{K}{2x(1-x)}$ soit au moins égal au plus grand des deux nombres 1 et q . On peut ainsi supprimer, dans T_n , tous les termes tels que $\mu < r(1-x) - \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r}$; la somme de ces termes reste toujours finie.

De même, soit $\mu = r(1-x) + h$, $h \geq \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r}$, $\frac{h}{r}$ tendant vers zéro. On a :

$$\begin{aligned} |a_r| x^\mu \sum_{\mu} \frac{r(r-1)\cdots(r-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \frac{1}{\mu^q} &< \\ < r^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} x^v \frac{r(r-1)\cdots(r-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \left(\frac{1}{\mu^q} + \frac{1}{(\mu+1)^q} + \cdots + \frac{1}{r^q}\right) & \\ < A r^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(\frac{rx}{r-\mu}\right)^v \left(\frac{r-\mu}{\mu} \frac{1-x}{x}\right)^\mu \sqrt{\frac{r}{\mu(r-\mu)}} r^\alpha & \\ < \frac{A}{\sqrt{rx(1-x)}} r^{q-1-\varepsilon+\alpha} \left(1-\frac{h}{rx}\right)^{h-rx} \left(1+\frac{h}{r(1-x)}\right)^{-h-r(1-x)} & \\ = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} r^{q-1-\varepsilon+\alpha} e^{-\frac{h^2}{2rx(1-x)} - \frac{h^3(1-2x)}{6r^2x^2(1-x)^2} - \cdots} & \end{aligned}$$

expression de même forme, qui est le terme d'une série convergente.

On peut ainsi remplacer T_n par

$$T = \sum_{v=1}^{\infty} x^v a_v \sum_{\mu} \frac{r(r-1)\cdots(r-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu \frac{1}{\mu^q}$$

où μ ne prend que les valeurs comprises entre $r(1-x) - \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r}$ et $r(1-x) + \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r}$, telles que $\mu \leq n$. De sorte que

$$r(1-x) - \sqrt{K} \sqrt{L} \sqrt{r} < n$$

$$r < \frac{n}{1-x} + \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3}} L \frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2} \left(1 + L \frac{n}{1-x}\right)$$

Les autres termes de ce développement tendent vers zéro, pour $n = \infty$.

Si $\mu = r(1-x) + h$

$$\frac{1}{\mu^q} = \frac{1}{r^q(1-x)^q} \left(1 - \frac{qh}{r(1-x)} + \frac{q(q+1)h^2}{2r^2(1-x)^2} - \dots \right)$$

$$\left| \frac{1}{\mu^q} - \frac{1}{r^q(1-x)^q} \right| < \frac{A}{r^q} \sqrt{\frac{Lr}{r}}$$

où A reste fixe.

$$\sum_{\mu} \frac{r(r-1)\dots(r-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} \left(\frac{1-x}{x} \right)^\mu < \sum_{\mu=0}^r = \left(1 + \frac{1-x}{x} \right)^r = \frac{1}{x^r}.$$

Si, dans T , on remplace $\frac{1}{\mu^q}$ par $\frac{1}{r^q(1-x)^q}$, la différence des deux valeurs a un module plus petit que

$$\sum_1^{\infty} r^{q-\frac{1}{2}-\varepsilon} \frac{A}{r^q} \sqrt{\frac{Lr}{r}} = A \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{Lr}}{r^{1+\varepsilon}}$$

augmenté d'un nombre fixe, provenant des premiers termes a_r . Comme cette série est convergente, on peut remplacer T_n par

$$T^r = \sum_r x^r a_r \sum_{\mu} \frac{r(r-1)\dots(r-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} \left(\frac{1-x}{x} \right)^\mu \frac{1}{r^q(1-x)^q}.$$

A partir d'un rang r déterminé, chaque terme a un module inférieur à

$$|a_r| \frac{1}{r^q(1-x)^q} < \frac{1}{(1-x)^q r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Si $r > \frac{n}{1-x}$, il ne reste qu'un nombre de termes de l'ordre de $\sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x}}$, dont la somme est inférieure à

$$\frac{1}{(1-x)^{q+1-\varepsilon} n^\varepsilon} \sqrt{KL \frac{n}{1-x}}.$$

On peut donc supprimer ces termes, et supposer $r < \frac{n}{1-x}$.

De même, si

$$r(1-x) + \sqrt{KLr} > n > r(1-x)$$

on a supposé $\mu \leq n$. Mais, pour les termes tels que $\mu > n$, on a:

$$\nu(1-x) \leq \mu < \nu < \nu(1-x) + 1 \sqrt{K\nu L\nu}.$$

$$\frac{n}{1-x} > \nu > \frac{n}{1-x} - \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2} \left(1 + L \frac{n}{1-x}\right)}$$

Si on ajoute ces termes à T' , à chaque valeur de ν correspondent des termes dont la somme a un module inférieur à $\frac{1}{(1-x)^q \nu^{1+\epsilon}}$. ν prend un nombre

de valeurs de l'ordre de $\sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x}}$. La somme de ces termes est inférieure à une expression qui reste finie, et tend vers zéro pour $n = \infty$.

On peut ainsi prendre T'' avec tous les termes tels que $\nu < \frac{n}{1-x}$, et μ compris entre les deux valeurs $\nu(1-x) \pm \sqrt{K\nu L\nu}$.

Mais, si on fait varier μ de 0 à ν ; on ajoute à T'' les termes où μ varie de 0 à $\nu(1-x) - \sqrt{K\nu L\nu}$ et de $\nu(1-x) + \sqrt{K\nu L\nu}$ à ν . Le coefficient de $\frac{a_\nu}{\nu^q (1-x)^q}$ est augmenté d'une somme de l'ordre de

$$\nu^{-1-\epsilon-\frac{K}{2x(1-x)}}$$

ce qui donne un produit de l'ordre de $\nu^{-1-\epsilon-\frac{K}{2x(1-x)}}$. La somme de ces termes reste finie, et l'on peut faire varier μ de 0 à ν .

$$T'_n = \sum_{\nu} x^\nu a_\nu \frac{1}{\nu^q (1-x)^q} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\nu(\nu-1) \cdots (\nu-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu = \frac{1}{(1-x)^q} \sum_{\nu^q} \frac{a_\nu}{\nu^q}$$

où ν prend les valeurs entières inférieures à $\frac{n}{1-x}$.

$T_n - \frac{1}{(1-x)^q} S_N$ a un module inférieur à un nombre fixe, quelque soit n , si $\frac{n}{1-x} - 1 < N \leq \frac{n}{1-x}$.

Si $q > p > \omega - \frac{1}{2}$, S_n reste fini, T_n reste aussi fini. Si $p > q > \omega - \frac{1}{2}$, $|S_n|$ ne

reste pas fini, mais le terme général $\frac{a_n}{n^q}$ tend vers zéro. Si n augmente d'une unité, N augmente d'un nombre limité, S_N ne reste pas fini, et T_n ne peut pas rester fini. A la fonction $f(x+y(1-x)) = \sum b_n y^n$ correspond le même nombre p .

Si $p > \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre p reste le même pour le développement dans tout cercle tangent intérieurement au premier, au point $z = 1$; p peut alors être considéré comme l'ordre d'infinitude au point 1.

Si $p < 0$, cette définition suppose que $f(z)$ est nul pour $z = 1$, ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à $-p$ (n° 4). On peut toujours remplir cette condition en ajoutant à $f(z)$ un polynôme de degré inférieur à $-p$.

Si $p \leq \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre ne sera l'ordre d'infinitude, qu'à condition qu'il reste le même dans tout cercle tangent intérieurement au premier, au point $z = 1$.

10. Au point $z = e^{\theta i}$ correspond un nombre p , tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{p+\varepsilon}} e^{n\theta i}$ soit convergente, et $\sum \frac{a_n}{n^{p-\varepsilon}} e^{n\theta i}$ divergente. On peut ramener ce point à $z = 1$ par un changement de variable.

Si p reste le même pour le développement de $f(z)$ dans tout cercle tangent intérieurement au premier au point $z = e^{\theta i}$, p sera l'ordre d'infinitude en ce point. Si $p < 0$ cela suppose qu'on a d'abord ajouté à $f(z)$ un polynôme tel que $f(z)$ soit nul pour $z = e^{\theta i}$, ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à $-p$. Si $p < \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre est l'ordre d'infinitude.

A chaque point du cercle de convergence correspond un nombre $p \geq \omega - 1$. Soit P le plus grand de ces nombres, ou leur plus grande limite s'il y en a une infinité supérieurs à $\omega - 1$. On a toujours $p \leq P$, et il y a des points tels que $p > P - \varepsilon$. Si $P > \omega - \frac{1}{2}$, ce nombre P est l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers du cercle de convergence.

Si $P \leq \omega - \frac{1}{2}$, il faudra considérer, en chaque point singulier, des cercles tangents intérieurement au premier, pour définir l'ordre d'infinitude.

II. Ordre d'infinitude de la fonction.

11. Il existe un nombre Q tel que la série $\sum \frac{|a_n|}{n^{Q+\varepsilon}}$ soit convergente, et la série $\sum \frac{|a_n|}{n^{Q-\varepsilon}}$ divergente (n° 2). On a toujours:

$$P \leq Q \leq \omega.$$

Si $P = Q$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ est uniformément convergente, pour toute valeur de ϑ ; cette fonction de ϑ a un module qui reste plus petit qu'un nombre déterminé fixe.

Mais, si $P < Q$, il peut arriver que la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ ne soit pas uniformément convergente. Cette série trigonométrique peut être une fonction discontinue de ϑ , ayant une valeur déterminée pour chaque valeur de ϑ . Cette fonction peut alors augmenter indéfiniment dans le voisinage de $\vartheta = \vartheta_0$, bien que la série $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} e^{n\vartheta_0 i}$ soit convergente, et prenne une valeur finie. Dans ce cas, la fonction $\sum \frac{a_n}{n^{P+\varepsilon}} z^n$ ne reste pas finie sur le cercle de convergence, son module peut dépasser tout nombre donné. Il faut alors distinguer l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers du cercle de convergence, et l'ordre d'infinitude de la fonction dans le cercle de convergence.

12. Supposons que la série $\sum_0^\alpha \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente pour $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$; c'est à dire que, à toute valeur de $\varepsilon > 0$, correspond un nombre n' tel que $\left| \sum_n^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} \right| < \varepsilon$, pour toute valeur $n \geq n'$, et quelque soit ϑ . Ce nombre n' ne dépend que de ε , il est indépendant de ϑ . Il existe alors un nombre A tel que $\left| \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} \right| < A$ quelque soit ϑ .

Si $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i}$ est aussi uniformément convergente; en effet, soit ϑ une valeur déterminée, et $\sum_{n+1}^\sigma \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} = R_n$

$$a_n e^{n\vartheta i} = n^q (R_{n-1} - R_n).$$

La série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i}$ est convergente (n° 10). Soit :

$$R'_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} = \frac{R_n}{(n+1)^\alpha} - \sum_{n+1}^\infty R_n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).$$

Si $n \geq n'$, nombre qui correspond à ε , on a $|R_n| < \varepsilon$, et

$$|R'_n| < \frac{\varepsilon}{(n+1)^a} + \varepsilon \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a} \right) = \frac{2\varepsilon}{(n+1)^a}.$$

Supposons $n > n'$ et $n+1 > 2^{\frac{1}{a}}$, on aura $|R'_n| < \varepsilon$. n est indépendant de ϑ , la série est uniformément convergente.

Il existe donc un nombre q tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente, quelque soit $\varepsilon > 0$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ n'étant pas uniformément convergente. On a :

$$P \leq q \leq Q.$$

Au nombre ε correspond un nombre A tel que $\left| \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i} \right| < A$ quelque soit ϑ .

13. A étant un nombre fixe, supposons inversement que l'on ait $\left| \sum_1^q \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} \right| < A$ quelque soit ϑ , ce qui suppose la série $\sum \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ convergente pour toute valeur de ϑ . Il en résulte que, pour toutes valeurs de n et $\lambda > 1$, on aura (n° 5) :

$$\left| \frac{a_q}{n^q} e^{n\vartheta i} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)^q} e^{(n+1)\vartheta i} + \dots + \frac{a_{n+\lambda-1}}{(n+\lambda-1)^q} e^{(n+\lambda-1)\vartheta i} \right| < A' L \lambda$$

A' étant également fixe.

Donnons à ϑ et m des valeurs déterminées, et posons :

$$\sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i} = S_n$$

$$|S_{m-1}| < A', \quad |S_n| < A' L (m-n).$$

Soit $\alpha < 0$, et :

$$\sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} = \sum_n^{m-1} \frac{S_n - S_{n+1}}{n^\alpha} = \frac{S_n}{n^\alpha} - \sum_{n+1}^{m-1} S_n \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

$$\left| \sum_n^{m-1} \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} \right| < \frac{2A'}{n^\alpha} L (m-n).$$

Décomposons la somme Σ en une suite de sommes de termes successifs commençant aux valeurs $n_0 = n$, $n_1 = 2n$, \dots , $n_v = 2^v n$ et $m < 2^{v+1} n$. On aura :

$$\left| \sum_n^m \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} \right| < 2A' \left(\frac{Ln}{n^\alpha} + \frac{L(2n)}{(2n)^\alpha} + \dots + \frac{L(2^r n)}{(2^r n)^\alpha} \right) <$$

$$< \frac{2A'}{n^\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{Ln + {}^v L2}{2^{v\alpha}} = A' \frac{2^{\alpha+1} (2^\alpha - 1) Ln + L2}{(2^\alpha - 1)^2 n^\alpha}$$

$$\left| \sum_n^{\infty} \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i} \right| < A'' \frac{Ln}{n^\alpha}.$$

A'' étant un nombre fixe, indépendant de n et de ϑ , lorsque α est donné. $\frac{Ln}{n^\alpha}$ tend vers zéro, pour $n = \infty$; à toute valeur de $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre n , à partir du quel $A'' \frac{Ln}{n^\alpha} < \varepsilon$. Donc la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\alpha}} e^{n\vartheta i}$ est uniformément convergente.

Inversement, si q est le plus petit nombre tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^{q+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente (n° 12); quelque soit le nombre A , il y aura des valeurs de ϑ telles que $\left| \sum_1^r \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i} \right| > A$. Cette fonction de ϑ peut prendre des valeurs de module aussi grand que l'on voudra, bien que, si $P < q - \varepsilon$, la série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit convergente pour toute valeur de ϑ .

14. Soit q un nombre positif tel que la série $\sum \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément convergente. Si $n \geq n'$, on aura :

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^q} e^{n\vartheta i}, \quad |R_n| < \varepsilon,$$

$$z = \varrho e^{\vartheta i}, \quad 0 < \varrho < 1,$$

$$f(z) = \sum_0^{n'} a_n z^n + \sum_{n'+1}^{\infty} n^q (R_{n-1} - R_n) \varrho^n =$$

$$= \sum_0^{n'} a_n z^n + (n' + 1)^q R_{n'} \varrho^{n'+1} + \sum_{n'+1}^{\infty} R_n ((n+1)^q \varrho^{n+1} - n^q \varrho^n).$$

ε et n' restant fixes, il existe un nombre A , tel que $\left| \sum_0^{n'} a_n z^n \right| < A$, quelque soit ϑ , si $\varrho < 1$. Soit N le nombre entier pour le quel $n^q \varrho^n$ a la plus grande valeur

(n° 3); supposons $1 - \varrho$ assez petit pour que N soit supérieur à n' , ou $1 > \varrho > e^{1-\frac{q}{n'}}$. On aura :

$$|f(z)| < A + 2\varepsilon N^q \varrho^N \leq A + 2\varepsilon \left(\frac{q}{-eL\varrho} \right)^q$$

$$(1 - \varrho)^q |f(z)| < A(1 - \varrho)^q + 2\varepsilon \left(\frac{q}{e} \right)^q$$

expression qui reste finie.

Si q est le nombre défini au n° 2, que nous supposons positif ou nul, $(1 - \varrho)^{q+\varepsilon} f(\varrho e^{\vartheta i})$ tend vers zéro, pour $\varrho = 1$, quelque soit la façon dont varie ϑ .

D'autre part $|(1 - \varrho)^{q-\varepsilon} f(\varrho e^{\vartheta i})|$ ne reste pas fini. En effet, s'il existait un nombre fixe A tel que l'on ait, quelque soient ϑ et $\varrho < 1$,

$$(1 - \varrho)^{q-\varepsilon} |f(\varrho e^{\vartheta i})| < A,$$

aux nombres A et ε correspondrait un nombre B (n° 5) tel que $\left| \sum_{1}^n \frac{a_n}{n^{\frac{q-\varepsilon}{2}}} e^{n\vartheta i} \right| < B$

quelque soit n ; $\left| \sum_{1}^n \frac{a_n}{n^{\frac{q-\varepsilon}{2}}} e^{n\vartheta i} \right|$ resterait fini, et la série $\sum \frac{a_n}{n^{\frac{q-\varepsilon}{2}}} e^{n\vartheta i}$ serait uniformément convergente.

On peut dire que q est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ à l'intérieur du cercle de convergence.

Si $q > P$ et $0 < \varepsilon < q - P$, la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ est convergente pour toute valeur de ϑ , mais son module peut dépasser tout nombre donné. Quelque soit A , il existe des valeurs de z , intérieures au cercle de convergence, telles que $|(1 - \varrho)^{q-\varepsilon} f(\varrho e^{\vartheta i})| > A$. Cependant, quelque soit ϑ , ce produit tend vers zéro, si ϱ tend vers 1. L'ordre d'infinitude en un point quelconque du cercle de convergence est au plus égal à P , qui peut être inférieur à l'ordre d'infinitude q à l'intérieur du cercle de convergence.

15. Supposons q négatif, $-\lambda \leq q < 1 - \lambda$ (n° 4). Soit $z_0 = e^{\vartheta_0 i}$ un point arbitraire du cercle de convergence, et

$$\varphi(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^{\lambda-1}}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)} f^{(\lambda-1)}(z_0).$$

Les coefficients de ce polynôme sont des séries uniformément convergentes.

$f(z) - q(z)$ s'annule, pour $z = z_0$, ainsi que ses $\lambda - 1$ premières dérivées.

Pour la fonction $f'(z) = \sum_1^n n a_n z^{n-1}$, on a $\omega' = \omega + 1$. Les deux séries $\sum \frac{a_n}{n^q}$ et $\sum \frac{n a_n}{(n-1)^{p+1}} = \sum \frac{a_n}{n^p} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-p-1}$ sont convergentes, ou divergentes, pour les mêmes valeurs de p . Les deux séries $\sum \frac{a_n}{n^p} e^{n\vartheta i}$ et $\sum \frac{n a_n}{(n-1)^{p+1}} e^{(n-1)\vartheta i}$ sont uniformément convergentes pour les mêmes valeurs de p . A la fonction $f'(z)$ correspondent les nombres $p' = p + 1$, $P' = P + 1$ et $q' = q + 1$ (n° 2, 10 et 12). A la fonction $f^{(\lambda)}(z)$ correspond le nombre $q_\lambda = q + \lambda \geq 0$.

Supposons $q > P$, $0 < \varepsilon < q - P$. La série $\sum \frac{a_n}{n^{q-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ est convergente, sans être uniformément convergente. On peut former des arcs de plus en plus petits sur les quels la convergence n'est pas uniforme. Il y a un point $e^{\vartheta_0 i}$ tel que cette série puisse prendre une valeur de module supérieur à un nombre donné quelconque A sur un arc aussi petit que l'on voudra terminé en ce point. Il y a des valeurs de z telles que

$$(1 - \varrho)^{q+\lambda-\varepsilon} |f^{(\lambda)}(\varrho e^{\vartheta i})| > A. \quad (\text{n° 14})$$

$f^{(\lambda)}(z)$ est une fonction continue. A chaque valeur de ϑ (entre certaines limites) correspondent des valeurs de $\varrho < 1$, vérifiant cette inégalité. Lorsque ϑ tend vers ϑ_0 , ϱ tend vers 1, et l'inégalité cesse d'être vérifiée à la limite. Pour cette suite de valeurs de z on a

$$(z - z_0)^{q+\lambda-\varepsilon} |f^{(\lambda)}(z)| > A.$$

On peut encore dire que q est l'ordre d'infinitude de la fonction $f(z)$ dans le cercle de convergence, ce qui veut dire que $q + \lambda$ est celui de $f^{(\lambda)}(z)$, ou qu'il existe des valeurs de $z = \varrho e^{\vartheta i}$ et $z_0 = e^{\vartheta_0 i}$ telles que le module de

$$(z - z_0)^{q-\varepsilon} \left(f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) - \dots - \frac{(z - z_0)^{\lambda-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots (\lambda-1)} f^{(\lambda-1)}(z_0) \right)$$

puisse dépasser tout nombre donné.

16. Supposons que ϑ ne varie que sur un arc déterminé $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$. Il existe, de même, un nombre q' tel que la série $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q'+\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ soit uniformément con-

vergente sur cet arc, $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{q'-\varepsilon}} e^{n\vartheta i}$ n'étant pas uniformément convergente.

Au nombre ε correspond un nombre A tel que $\left| \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{q'+\varepsilon}} e^{n\vartheta i} \right| < A$, pour ces valeurs de ϑ . Quelque soit A' , il existe des valeurs de ϑ , sur cet arc, telles que $\left| \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^{q'-\varepsilon}} e^{n\vartheta i} \right| > A'$.

q' est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ sur l'arc considéré, $q' + \lambda$ est celui de la dérivée d'ordre λ , $f^{(\lambda)}(z)$.

Si $\vartheta_1 - \vartheta_0$ tend vers zéro, l'arc ayant pour limite un point $e^{\vartheta i}$, il peut arriver que q' ait une limite plus grande que l'ordre d'infinitude en ce point. Il faut alors distinguer deux ordres d'infinitude en ce point. L'un est l'ordre d'infinitude au point $e^{\vartheta i}$ considéré isolément, c'est le nombre p (n° 2) correspondant à un cercle tangent intérieurement au premier et de rayon aussi petit que l'on voudra. Mais, si $p > \omega - \frac{1}{2}$, cet ordre d'infinitude reste égal à p . L'autre $q' \geq p$ est l'ordre d'infinitude de $f(z)$ sur un arc infiniment petit comprenant le point $e^{\vartheta i}$. On a toujours

$$p \leq q' \leq \omega,$$

où ω est l'ordre au même point défini par M. HADAMARD.

III. Exemples.

17. L'ordre en un point peut changer avec le cercle de convergence. Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{c_n}$, où c_n représente une suite de nombres entiers tels que $c_{n+1} - c_n > \alpha \sqrt{c_n} L c_n$, α étant fixe. Pour cette fonction le cercle de convergence est une coupure. Soit ω l'ordre sur le cercle de rayon 1, c'est à dire la plus grande limite de $\frac{L(a_n c_n)}{L c_n}$. Formons le développement:

$$f(x + y(1-x)) = \sum b_m y^m, \quad 0 < x < 1$$

$$b_m = \left(\frac{1-x}{x} \right)^m \sum \frac{c_n(c_n-1) \cdots (c_n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} a_n x^{c_n}.$$

Soit $c_n = \frac{m}{1-x} + h$; le coefficient de a_n peut se mettre sous la forme:

$$A \left(\frac{1-x}{x} \right)^m \frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)} \left(\frac{c_n-m}{m} \right)^m \sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}} \\ = A \left(1+h \frac{1-x}{m} \right)^{c_n} \left(1+h \frac{1-x}{mx} \right)^{m-c_n} \sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}}.$$

A tend vers 1, si m , c_n et c_n-m augmentent indéfiniment.

Si $|h| < \frac{mx}{1-x}$, cette expression peut s'écrire :

$$A \sqrt{\frac{c_n}{2\pi m(c_n-m)}} e^{-\frac{h^2(1-x)^2}{2mx} + \frac{h^3(1-x)^2}{6m^2x^2}(1-x^2) -}$$

Si $h = \pm \frac{1}{1-x} \sqrt{2KxmLm}$, cette expression est de l'ordre de $m^{-K-\frac{1}{2}}$. Le rapport

$\frac{c_n}{c_n-m}x$, de deux coefficients consécutifs de b_m , diminue si c augmente. Mais

comme $c_{n+1} - c_n = h' - h > \alpha \sqrt{c_n L c_n}$, le rapport de deux coefficients consécutifs de termes non nuls tend vers zéro si $c_n > \frac{m}{1-x}$, et augmente indéfiniment si

$c_{n+1} < \frac{m}{1-x}$. A partir d'un rang déterminé $|a_n| < c_n^{\omega-1+\epsilon}$. Si $K > \frac{1-x}{8x} \alpha^2$, à partir

d'un rang déterminé il restera un seul terme c_n entre les rangs $c = \frac{m}{1-x} \pm$

$\pm \frac{1}{1-x} \sqrt{2KxmLm}$. Il en résulte :

$$|b_m| < A' m^{\omega-1+\epsilon-K-\frac{1}{2}}.$$

A' restant fixe. Cette expression est au plus de l'ordre de $m^{\omega-\frac{3}{2}+\epsilon}$.

D'autre part, considérons une suite de termes tels que $|a_n| > (c_n)^{\omega-1-\epsilon}$, et soit :

$$(1-x)c_n < m < 1 + (1-x)c_n.$$

On a :

$$|b_m| > \frac{A}{\sqrt{2\pi m}} (c_n)^{\omega-1-\epsilon} = A' m^{\omega-1+\epsilon-K-\frac{1}{2}}$$

On peut supposer $2\epsilon < K$; il en résulte que $\frac{L|b_m|}{Lm}$ a pour plus grande limite $\omega - \frac{3}{2}$.

Sur le cercle de centre x , $f(z)$ est d'ordre $\omega - \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$ est le seul point singulier de ce cercle, il est d'ordre $\omega - \frac{1}{2}$.

18. Sur le premier cercle de convergence, de centre $z = 0$, le point $z = 1$ est d'ordre ω . En effet, on a :

$$Vc_{n+1} - Vc_n > \sqrt[n]{c_n + \alpha Vc_n Lc_n} - Vc_n = \frac{\alpha Vc_n Lc_n}{\sqrt[n]{c_n + \alpha Vc_n Lc_n}}$$

expression qui augmente indéfiniment avec c_n , et n . Quelque soit le nombre K , à partir d'un rang déterminé, on a :

$$Vc_{n+1} - Vc_n > K$$

$$\sqrt[n+p]{c_{n+p}} > \sqrt[n]{c_n} + Kp > n + p \quad \text{si } p > \frac{n}{K-1};$$

en supposant n fixe, on voit qu'à partir d'un rang déterminé on a $c_{n+p} > (n+p)^2$; ou $c_n > n^2$ à partir d'un rang n' .

$$\left| \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} \right| < c_n^{-1+\varepsilon+\varepsilon'} < \frac{1}{n^{2(1-\varepsilon-\varepsilon')}}.$$

Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on peut supposer $\varepsilon' < \frac{1}{2} - \varepsilon$, la série $\sum \frac{|a_n|}{c_n^{\omega-\varepsilon}}$ est convergente. La série $\sum \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i}$ est uniformément convergente. La fonction $\sum_0^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i}$ est finie et continue pour toute valeur de ϑ . Formons l'expression :

$$x = m \int_{-\vartheta}^{\vartheta} e^{-m \vartheta i} \sum_0^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} e^{c_n \vartheta i} = 2m \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} \frac{\sin(c_n - m) \vartheta}{c_n - m}.$$

Soit $m = c_{n'}$, où n' prend des valeurs telles que

$$|a_{n'}| > c_{n'}^{\omega-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Le terme $2m \frac{a_{n'}}{c_{n'}^{\omega-\varepsilon}} \vartheta$ a un module supérieur à $2 \vartheta c_{n'}^{\frac{\varepsilon}{2}}$, qui augmente indéfiniment avec n' .

Les autres termes de x ont une somme finie. En effet, si $n < n'$, on a une somme de module inférieur à

$$2c_{n'} \sum_0^{n'-1} \frac{|a_n|}{c_n^{\omega-\varepsilon}(c_{n'}-c_n)} < 2 \sum_0^{n'-1} \frac{c_{n'}}{c_n^{1-\varepsilon-\varepsilon'}(c_{n'}-c_n)} = 2 \sum_0^{n'-1} c_{n'}^{\varepsilon+\varepsilon'} \left(\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n'}-c_n} \right)$$

la série $\sum_0^{\varepsilon} c_n^{\varepsilon+\varepsilon'-1}$ est convergente.

Si n dépasse un rang déterminé

$$c_{n'} - c_n > K(n' - n) \quad (Vc_{n'} + Vc_n) > K(n' - n) \quad Vc_{n'}$$

$$\sum_n^{n'-1} \frac{c_{n'}^{\varepsilon+\varepsilon'}}{c_{n'} - c_n} < \frac{1}{K} c_{n'}^{\varepsilon+\varepsilon'-\frac{1}{2}} \sum_n^{n'-1} \frac{1}{n' - n} < \frac{1 + Ln'}{K n'^{1-2\varepsilon-2\varepsilon'}}$$

expression qui reste finie, et tend vers zéro, pour $n' = \infty$.

Si $n > n'$, on a, dans x , une somme de termes de module inférieur à

$$2c_{n'} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{c_n^{\omega-\varepsilon}(c_n - c_{n'})} < c_{n'} \sum_{n'+1}^{\infty} \frac{2}{c_n^{1-\varepsilon-\varepsilon'}(c_n - c_{n'})}$$

$$\sum_{n'+1}^{\varepsilon} \frac{2}{K(n - n') c_n^{\frac{1}{2}-\varepsilon-\varepsilon'}} < \sum \frac{2}{K(n - n') n^{1-2\varepsilon-2\varepsilon'}} <$$

$$< \sum \frac{2}{K(n - n')^2-2\varepsilon-2\varepsilon'} = \frac{2}{K} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{2(1-\varepsilon-\varepsilon')}}.$$

Donc, quelque soit ϑ , x ne reste pas fini, si m augmente indéfiniment. La fonction $\sum \frac{a_n}{c_n^{\omega-\varepsilon}} z^{c_n}$ n'est pas à écart fini, sur un arc comprenant $z = 1$, qui est un point singulier d'ordre ω .

Tout point $z = e^{\vartheta i}$ est d'ordre ω sur le cercle de convergence de centre 0.

Mais il est d'ordre $\omega - \frac{1}{2}$ sur un cercle tangent intérieurement au point $e^{\vartheta i}$.

19. Pour déterminer l'ordre d'infinitude de $f(z)$ ($n^{\circ} 16$), soit $q > \omega - 1$, et

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_1^n \frac{b_m}{m^q} = \sum_1^n \frac{(1-x)^m}{m^q} \sum x^{c_p-m} a_p \frac{c_p(c_p-1)\cdots(c_p-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} = \\ &= \sum_{p=0}^{\varepsilon} x^{c_p} a_p \sum_{m=1}^n \frac{c_p(c_p-1)\cdots(c_p-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{c_p} \frac{1}{m^q}. \end{aligned}$$

Nous allons étudier l'ordre de grandeur de T_n , en supprimant des termes dont la somme restera finie, quelque soit n . Les calculs du $n^{\circ} 9$ montrent qu'on peut

ne donner à μ que les valeurs comprises entre $(1-x)c_v \pm \sqrt{Kc_v Lc_v}$ où $\frac{K}{2x(1-x)}$ est au moins égal au plus grand des deux nombres $\frac{3}{2}$ et $q + \frac{1}{2}$.

Et comme on a, en outre, $\mu \leq n$, on aura :

$$c_v < \frac{n}{1-x} + \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2} \left(1 + L \frac{n}{1-x}\right)}.$$

Il ne reste, dans T_n , qu'un nombre limité de termes a_v , tels que $c_v > \frac{n}{1-x}$; chacun donne une somme de module inférieur à $A \frac{|a_v|}{c_v^q} < A c_v^{\omega-1-q+\varepsilon}$ expression qui reste finie, ainsi que A , car on peut supposer $0 < \varepsilon < q - \omega + 1$. On peut ainsi supposer $c_v < \frac{n}{1-x}$.

En posant $\mu = (1-x)c_v + h$, on a

$$T = \sum_v x^{c_v} a_v \sum_{\mu} \frac{c_v(c_v-1) \cdots (c_v-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu} \frac{1}{c_v^q (1-x)^q} \left(1 - \frac{qh}{c_v(1-x)} + \frac{q(q+1)h^2}{2c_v^2(1-x)^2} \cdots\right).$$

Mais $h < \sqrt{Kc_v Lc_v}$, la série

$$\sum_v x^{c_v} |a_v| \sum_{\mu=0}^{c_v} \frac{c_v(c_v-1) \cdots (c_v-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \frac{\sqrt{Lc_v}}{c_v^{q+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu} = \sum |a_v| \frac{\sqrt{Lc_v}}{c_v^{q+\frac{1}{2}}} < \sum \frac{\sqrt{Lc_v}}{c_v^{q-\omega+\frac{3}{2}-\varepsilon}}$$

est convergente; il en résulte qu'on peut remplacer T par

$$T' = \sum x^{c_v} a_v \sum \frac{c_v(c_v-1) \cdots (c_v-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\mu} \frac{1}{c_v^q (1-x)^q}.$$

On a supposé $\mu \leq n$ lorsque

$$(1-x)c_v + \sqrt{Kc_v Lc_v} > n > (1-x)c_v$$

$$\frac{n}{1-x} > c_v > \frac{n}{1-x} - \sqrt{\frac{Kn}{(1-x)^3} L \frac{n}{1-x} + \frac{K}{2(1-x)^2} \left(1 + L \frac{n}{1-x}\right)}.$$

Mais il ne reste qu'un nombre limité de termes a_v vérifiant ces conditions, et si on ajoute les termes tels que $\mu > n$, leur somme reste finie, quelque soit n . Dans

T' , on a alors $c_v < \frac{n}{1-x}$, et μ reste compris entre $(1-x)c_v \pm \sqrt{Kc_v Lc_v}$.

Mais, si μ varie de 0 à c_ν , on ajoute à T'' des termes dont la somme a un module inférieur à une expression de l'ordre de

$$\sum_{\nu} \frac{|a_\nu|}{c_\nu^{q+\frac{1}{2}+\frac{K}{2x(1-x)}}} < \sum_{\nu} c_\nu^{\omega-q-\frac{3}{2}-\frac{K}{2x(1-x)}}$$

qui est une série convergente. On a alors:

$$T''_n = \sum x^{c_\nu} a_\nu \frac{1}{c_\nu^q (1-x)^q} \sum_{\nu=0}^{c_\nu} \frac{c_\nu (c_\nu-1) \cdots (c_\nu-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \left(\frac{1-x}{x}\right)^\mu = \frac{1}{(1-x)^q} \sum c_\nu^q.$$

Si $\frac{n}{1-x} + 1 > N \geq \frac{n}{1-x}$ on aura $c_\nu \leq N$. $T''_n = \frac{1}{(1-x)^q} S_N$ a un module qui reste fini.

Donc, si $p > \omega - 1$, le nombre p reste le même sur tout cercle tangent au cercle de convergence au point $z=1$, p est l'ordre d'infinitude en ce point.

20. Soit, par exemple, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{c_n}$

$$n^\alpha - A < c_n < n^\alpha + A,$$

A et α restant finis, $\alpha > 2$. On a:

$$\frac{1}{(n^\alpha + A)^\beta} < \frac{1}{c_n^\beta} < \frac{1}{(n^\alpha - A)^\beta}.$$

La série $\sum \frac{1}{c_n^\beta}$ est convergente si $\beta > \frac{1}{\alpha}$, divergente si $\beta \leq \frac{1}{\alpha}$. Au point $z=1$ correspond le nombre $p = \frac{1}{\alpha}$, qui est l'ordre d'infinitude en ce point. Sur un cercle tangent intérieurement au point 1, ce point est d'ordre $\frac{1}{2} > \frac{1}{\alpha}$, bien que ce point 1 soit le seul point singulier du nouveau cercle de convergence. Tous les points du premier cercle de convergence sont d'ordre $\omega = 1$, ils sont d'ordre $\frac{1}{2}$ sur tout cercle tangent intérieurement. L'ordre d'infinitude de la fonction dans le premier cercle est $\frac{1}{\alpha}$, puisque la série $\sum \frac{1}{c_n^{\alpha+\epsilon}}$ est convergente. Mais l'ordre

d'infinitude des divers points singuliers n'est pas le même. Supposons que l'on ait la fonction particulière

$$f(z) = \sum_0^{\infty} z^{n^3}.$$

Les points $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{\pi i}{7}}$, $e^{\frac{\pi i}{9}}$, ont l'ordre d'infinitude $\frac{1}{3}$ comme $z=1$. Pour les points $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $e^{\frac{\pi i}{5}}$, $e^{\frac{\pi i}{7}}$, $e^{\frac{\pi i}{9}}$ on trouve $p=0$.

Si l'on a $c^n - A < c_n < c^n + A$, $c > 1$, la série $\sum \frac{1}{c_n^\beta}$ est convergente si $\beta > 0$. On a $p=0$ en tout point du cercle de convergence, l'ordre d'infinitude de chacun d'eux est égal ou inférieur à zéro.

21. Pour une série quelconque $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, d'ordre ω , supposons $|S_n| < A$ quelque soit n , $S_n = \sum_1^n a_n$. Formons le développement:

$$\begin{aligned} f(x+y(1-x)) &= \sum b_m y^m, \quad 0 < x < 1 \\ b_m &= (1-x)^m \left[a_m + a_{m+1} \frac{m+1}{1} x + \dots + a_{m+r} \frac{(m+1) \dots (m+r)}{1 \cdot 2 \dots r} x^r + \dots \right] = \\ &= (1-x)^m \sum_{r=0}^{\infty} x^r \frac{(m+1) \dots (m+r)}{1 \cdot 2 \dots r} (m+r)^q (S_{m+r} - S_{m+r-1}) = \\ &= (1-x)^m \left[-m^q S_{m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} x^r \frac{(m+1) \dots (m+r)}{1 \cdot 2 \dots r} S_{m+r} \left((m+r)^q - \frac{(m+r+1)^{q+1}}{r+1} x \right) \right] \\ |b_m| &< A m^q + A \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1} \frac{(m+1) \dots (m+r-1)}{1 \cdot 2 \dots (r-1)} \left| (m+r-1)^q - \frac{(m+r)^{q+1}}{r} x \right| \\ (m+r-1)^q - \frac{(m+r)^{q+1}}{r} x &= (m+r)^q \left(1 - x \frac{m+r}{r} - \frac{q}{m+r} + \frac{q(q-1)}{2(m+r)^2} x \right) \end{aligned}$$

Si $\left| r - \frac{mx}{1-x} \right| > \frac{1}{2}$, on a

$$\left| \frac{1}{m+r} \right| = \frac{1}{r(1-x) + m(1-x) - \frac{m^2}{r} x} < \frac{2}{1-x} \frac{2mx + 1-x}{2m+1-x}$$

expression qui reste finie. Cette condition est remplie sauf pour une valeur de r . Il en résulte:

$$\begin{aligned} |b_m| &< A m^q (1-x)^m + A' m^{q-\frac{3}{2}} + \\ &+ A' \sum_1^{\infty} x^{r-1} \frac{(m+1) \dots (m+r-1)}{1 \cdot 2 \dots (r-1)} (m+r)^q (1-x)^m \left| 1 - x \frac{m+r}{r} \right| \end{aligned}$$

où A' reste fini.

Soit $\nu = \frac{mx}{1-x} + h$, $|h| < \frac{mx}{1-x}$.

$$x^{\nu-1} \frac{(m+1) \cdots (m+\nu-1)}{1 \cdot 2 \cdots (\nu-1)} (1-x)^m \left| 1 - x^{\frac{m+\nu}{\nu}} \right|$$

reste dans un rapport fini avec

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m+\nu}{m} (1-x) \right)^m \left(\frac{m+\nu}{\nu} x \right)^\nu \sqrt{\frac{\nu}{m(m+\nu)}} \left| 1 - x^{\frac{m+\nu}{\nu}} \right| = \\ & = \left(1 + \frac{h(1-x)}{m} \right)^{m+\nu} \left(1 + h \frac{1-x}{mx} \right)^{-\nu} |h| (1-x)^{\frac{1}{\nu}} \sqrt{m\nu(m+\nu)} \\ & = \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} \frac{|h|}{m^2} \left(1 - h \frac{1-x^2}{2mx} + h^2 \frac{(3+2x+3x^2)(1-x)^2}{8m^2x^2} + \dots \right) e^{-h^2 \frac{(1-x)^2}{2mx} + h^3 \frac{(1-x)^3(1+x)}{6m^2x^2} - \dots} \end{aligned}$$

Dans b_m , on peut supposer $\left| \frac{h}{m} \right|$ inférieur à un nombre fixe ε ; car si $\left| \frac{h}{m} \right| > \varepsilon$, le rapport de deux termes consécutifs est inférieur à un nombre plus petit que 1, si $h > 0$; et supérieur à un nombre plus grand que 1, si $h < 0$. Les termes sont inférieurs à toute puissance de m . On a donc, à partir d'une valeur déterminée de m :

$$|b_m| < A'' m^{q-\frac{3}{2}} \sum |h| e^{-h^2 \frac{(1-x)^2}{2mx}},$$

où $h = \alpha + \nu$, α restant fixe, et ν prenant les valeurs entières comprises entre $-\varepsilon m$ et $+\varepsilon m$. Cette expression est du même ordre de grandeur que

$$m^{q-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-h^2 \frac{(1-x)^2}{2mx}} \frac{h dh}{m} = \frac{x}{(1-x)^2} m^{q-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que la fonction $\sum b_m y^m$ est au plus de l'ordre $q + \frac{1}{2}$.

Si p est le nombre correspondant au point 1 (n° 2), sur un cercle c' tangent intérieurement au premier en ce point, l'ordre de la fonction est $\omega' < p + \frac{1}{2}$.

Soit un cercle c'' tangent au point 1, intérieurement au premier et extérieurement au cercle c' . Sur ce cercle c'' on aura $p'' \geq \omega' - \frac{1}{2}$.

Par exemple, pour la fonction $f(z)$ du n° 17, on a $\omega' = \omega - \frac{1}{2}$, $p'' > \omega - 1$. Si

en un point $z = e^{yi}$, on a $p = \omega - 1$, le nombre p restera égal à $\omega - 1$ sur tout cercle tangent en ce point, et l'ordre d'infinitude est $\omega - 1$.

Par exemple, si $|c^n - c_n|$ reste fini, $c > 1$, tous les points du cercle de convergence ont le même ordre d'infinitude $p = \omega - 1$.

22. Pour une série quelconque, d'ordre ω , formons le développement:

$$f(\varrho e^{\Theta i} + (1 - \varrho)y) = \sum b_m y^m, \quad 0 < \varrho < 1$$

$$b_m = (1 - \varrho)^m \sum_{r=0}^{\infty} a_{m+r} \frac{(m+1) \cdots (m+r)}{1 \cdot 2 \cdots r} \varrho^r e^{r\Theta i}.$$

Soit B_m le maximum du module de b_m , lorsque Θ varie de 0 à 2π , ϱ restant fixe. On sait que (n° 5):

$$B_m \geq (1 - \varrho)^m |a_{m+r}| \frac{(m+1) \cdots (m+r)}{1 \cdot 2 \cdots r} \varrho^r,$$

où r prend une valeur arbitraire. Cette expression est de l'ordre de

$$\left(\frac{m+r}{m}(1-\varrho)\right)^m \left(\frac{m+r}{r}\varrho\right)^r |a_{m+r}| \sqrt{\frac{m+r}{2\pi m r}}.$$

Supposons $m+r$ choisi de façon que $|a_{m+r}| > (m+r)^{\omega-1-\varepsilon}$ et ensuite $m = (m+r)(1-\varrho) + h$, $0 \leq h < 1$. A étant un nombre fixe, on aura:

$$B_m > A m^{\omega-1-\varepsilon-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{Lm B_m}{Lm} > \frac{LA}{Lm} + \omega - \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Il y a donc au moins un point $e^{\Theta i}$ pour le quel la fonction est d'ordre $\omega' \geq \omega - \frac{1}{2}$ sur le cercle de rayon $1 - \varrho$ (arbitraire) tangent intérieurement au premier cercle de convergence. Sur tout cercle tangent au même point, de rayon compris entre $1 - \varrho$ et 0, on a:

$$P'' \geq \omega' - \frac{1}{2} \geq \omega - 1$$

Supposons $P = \omega - 1$, (n° 10), c'est à dire qu'en tout point du cercle de convergence $p = \omega - 1$. Il y a au moins un point $e^{\Theta i}$ pour le quel on aura $p' = \omega - 1$ sur tout cercle tangent intérieurement; donc $P = \omega - 1$ est l'ordre d'infinitude maximum aux points singuliers.

23. Considérons la fonction:

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^\alpha} z^n,$$

où α est un nombre entier plus grand que 1. $z=1$ est le seul point singulier du cercle de convergence (Acta Mathematica T. 22). La série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} e^{\pi i n^\alpha}$ est divergente; en effet, si n prend les valeurs entières comprises entre $\left(2K \pm \frac{1}{4}\right)^\alpha$,

$$\left| \pi n^\alpha - 2K\pi \right| < \frac{\pi}{4},$$

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} e^{\pi i n^\alpha} \right| > \sum \frac{\cos \left(\pi n^\alpha \right)}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} > \frac{1}{V_2} \int_{\left(2K-\frac{1}{4}\right)^\alpha}^{\left(2K+\frac{1}{4}\right)^\alpha} \frac{dx}{x^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\alpha}{2V_2};$$

si K augmente indéfiniment, cette somme ne tendant pas vers zéro, la série est divergente.

Supposons $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$ et $n = (2K)^\alpha + \mu$, $0 \leq \mu \leq (2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha - 1$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^\alpha} = \sum \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\mu}{(2K)^\alpha}\right)^\beta} e^{\frac{\pi i}{\alpha} \mu (2K)^{1-\alpha} \left[1 + \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{2} \frac{\mu}{(2K)^\alpha} + \dots\right]}$$

Mais la somme $\sum_0^\mu \frac{2}{K^{\alpha\beta}} \frac{\mu}{K^\alpha} = \frac{\mu(\mu+1)}{K^{\alpha\beta+\alpha}}$ est de l'ordre de $\frac{4^\alpha \alpha^2}{K^{\alpha\beta+2-\alpha}}$ qui est le terme d'une série convergente. $\frac{\mu}{K^{\alpha-1}}$ reste fini. Si on développe chaque terme suivant les puissances de $\frac{\mu}{(2K)^\alpha}$, on ramène la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^\alpha}$ à la somme de séries convergentes, et de la série dont le terme général est

$$\sum \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}} e^{\frac{\pi i}{\alpha} \mu (2K)^{1-\alpha}} = \frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{\alpha} 2K \left(\left(1 + \frac{1}{K}\right)^\alpha - 1 \right)} - 1}{e^{\frac{\pi i}{\alpha} (2K)^{1-\alpha}} - 1}.$$

Le module $\frac{1}{(2K)^{\alpha\beta}} \frac{\sin \frac{\pi}{\alpha} K \left[\left(1 + \frac{1}{K}\right)^\alpha - 1 \right]}{\sin \frac{\pi}{2\alpha} (2K)^{1-\alpha}}$ est de l'ordre de $\frac{2}{(2K)^{\alpha\beta}} \frac{\alpha \alpha!}{(2K)^{2-\alpha}}$.

Il en résulte que la série est convergente. La fonction $f(z)$ est d'ordre $\omega = 1 - \beta$. Au point $z = 1$, on a $p = 1 - \beta - \frac{1}{\alpha}$. Pour les autres points du cercle de convergence, qui ne sont pas singuliers, $p = -\beta$. Mais, quoique la série $\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^\alpha + \theta n i}$ soit convergente, quelque soit θ , si $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$, la convergence n'est pas uniforme et $q > p$. Considérons en effet la somme:

$$X = \sum_{K=1}^{\infty} \sum_n \frac{1}{[(2K)^\alpha + \mu]^\beta} e^{\pi i n^\alpha + \theta n i}, \quad n = (2K)^\alpha + \mu$$

$$0 \leq \mu \leq (2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha - 1, \quad \beta > 1 - \frac{1}{\alpha}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Comme $\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \sum_1^\mu \frac{\mu}{K^\alpha} = \sum \frac{\mu(\mu+1)}{2K^{\alpha\beta+\alpha}}$ reste fini. La somme X reste finie, quelque soit θ , en même temps que

$$\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \sum e^{\theta i (2K)^\alpha + \mu i} \left[\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right]$$

et comme $\frac{(2K)^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}}$ reste fini, on peut supprimer un nombre déterminé de valeurs de K . Cette série devient:

$$\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} e^{\theta i (2K)^\alpha} \frac{e^{\theta i ((2K+2)^\alpha - (2K)^\alpha) + \frac{2K\pi i}{\alpha} \left(\left(1 + \frac{1}{K}\right)^\alpha - 1 \right)} - 1}{e^{\left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right) i} - 1} \frac{1}{2i \sin \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right)}.$$

L'arc $x = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right)$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$; $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ reste, en valeur absolue, inférieur à un nombre fixe; et comme la série $\sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}}$ est convergente, $\alpha\beta > \alpha - 1 \geq 1$, X reste fini en même temps que

$$X' = \sum \frac{1}{K^{\alpha\beta}} e^{-\left(\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right) i} \frac{e^{\theta i (2K+2)^\alpha + \frac{2K\pi i}{\alpha} \left(\left(1 + \frac{1}{K}\right)^\alpha - 1 \right)} - e^{\theta i (2K)^\alpha}}{\theta + \frac{\pi}{\alpha(2K)^{\alpha-1}}}.$$

Si $0 \leq \theta \leq \pi$ cette expression reste finie. Soit;

$$\Theta = -\frac{1}{\alpha(2H)^{\alpha-1}}, \quad N < H < N+1,$$

où N est un nombre entier. Nous supposons que K ne varie que de 2 à N et de $N+3$ à ∞ .

Soit $N' = \frac{N}{2}$ ou $\frac{N+1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_1^{N'} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(K^{1-\alpha} - H^{1-\alpha})} &< \sum_1^{N'} \frac{1}{K^{\alpha\beta+2-\alpha}(1-2^{1-\alpha})} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}} \\ \sum_{N'+1}^{N-3} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(K^{1-\alpha} - H^{1-\alpha})} &< \sum_{N'+1}^{N-3} \frac{H^{\alpha-1}}{(\alpha-1)K^{\alpha\beta}(H-K)} < \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha-1} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}} \\ \sum_{N+3}^{\infty} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1}(H^{1-\alpha} - K^{1-\alpha})} &< \sum_{N+3}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-1)K^{\alpha\beta+1-\alpha}(K-H)} < \frac{1}{\alpha-1} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha\beta+2-\alpha}} \end{aligned}$$

Ces expressions restent finies. Il en résulte qu'en négligeant des termes qui restent toujours finis, on peut remplacer X' par

$$e^{-\frac{i}{2}} \sum \frac{e^{\Theta i(2K+2)^{\alpha}} - e^{\Theta i(2K)^{\alpha}}}{K^{\alpha\beta} \left(\Theta + \frac{i}{\alpha(2K)^{\alpha-1}} \right)}$$

et X reste fini en même temps que

$$\sum \frac{e^{\Theta i(2K+2)^{\alpha}} - e^{\Theta i(2K)^{\alpha}}}{K^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha} - K^{1-\alpha})} \quad \begin{cases} 2 \leq K < N-3 \\ N+3 \leq K < \infty \end{cases}$$

que l'on peut encore remplacer par

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{H^{1-\alpha} - K^{1-\alpha}} \left(\frac{e^{\Theta i(2K+2)^{\alpha}}}{(K+1)^{\alpha\beta}} - \frac{e^{\Theta i(2K)^{\alpha}}}{K^{\alpha\beta}} \right) = \\ = \frac{e^{4^{\alpha}\Theta i}}{2^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-1)} + \frac{e^{(2N-4)^{\alpha}\Theta i}}{(N-2)^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-(N-3)^{1-\alpha})} - \frac{e^{(2N+6)^{\alpha}\Theta i}}{(N+3)^{\alpha\beta}(H^{1-\alpha}-(N+2)^{1-\alpha})} + \\ + \sum \left(\frac{1}{H^{1-\alpha}-(K-1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{H^{1-\alpha}-K^{1-\alpha}} \right) \frac{e^{(2K)^{\alpha}\Theta i}}{K^{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} [(2N-4)^{\alpha} - (2N)^{\alpha}] \Theta = 4\pi \left(\frac{N}{H} \right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\alpha-1}{N} + 2 \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{3N^2} \dots \right) = \\ = 4\pi \left(1 - \frac{\alpha-1}{1} \frac{H-N}{N} + \dots \right) \left(1 - \frac{\alpha-1}{N} \right) \end{aligned}$$

où $0 \leq H-N < 1$.

$(2N+6)^a \Theta$ donne un développement analogue. On peut ainsi, en supprimant des termes toujours finis, remplacer les trois premiers termes de l'expression précédente par

$$\frac{e^{(2N)^a \Theta i}}{N^{\alpha\beta}} \left(\frac{-1}{H^{1-a}-1} + \frac{1}{H^{1-a}-(N-3)^{1-a}} - \frac{1}{H^{1-a}-(N+2)^{1-a}} - \frac{1}{H^{1-a}} \right) =$$

$$\frac{e^{(2N)^a \Theta i}}{N^{\alpha\beta}} \sum \left(\frac{-1}{H^{1-a}-(K-1)^{1-a}} + \frac{1}{H^{1-a}-K^{1-a}} \right)$$

et X par

$$\sum \left(\frac{e^{(2N)^a \Theta i}}{N^{\alpha\beta}} - \frac{e^{(2K)^a \Theta i}}{K^{\alpha\beta}} \right) \frac{K^{1-a} - (K-1)^{1-a}}{(H^{1-a} - (K-1)^{1-a})(H^{1-a} - K^{1-a})}.$$

Mais

$$\sum \left| \left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}} - \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \right) \frac{K^{1-a} - (K-1)^{1-a}}{(H^{1-a} - (K-1)^{1-a})(H^{1-a} - K^{1-a})} \right|$$

reste fini. En effet

$$\sum_{N+3}^{\infty} \left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}} - \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \right) \left(\frac{1}{H^{1-a} - (K-1)^{1-a}} - \frac{1}{H^{1-a} - K^{1-a}} \right) =$$

$$= \frac{1}{H^{1-a} - (N+2)^{1-a}} - \frac{1}{(N+3)^{\alpha\beta}} + \sum_{N+3}^{\infty} \frac{1}{H^{1-a} - K^{1-a}} - \frac{1}{(K+1)^{\alpha\beta}} <$$

$$< \frac{3\alpha\beta}{N^{\alpha\beta+1}((N+1)^{1-a} - (N+2)^{1-a})} + \sum \frac{\alpha\beta}{K^{\alpha\beta+1}((N+1)^{1-a} - K^{1-a})} <$$

$$< \frac{3\alpha\beta}{(\alpha-1)N^{\alpha\beta+1-a}} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^a + \alpha\beta \sum_{N+3}^{\infty} \frac{1}{K^{\alpha\beta+1-a}(K-N-1)}$$

expressions qui restent finies, car $\alpha\beta+1-a > 0$

$$\sum_{N+3}^{N-3} \left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}} - \frac{1}{K^{\alpha\beta}} \right) \left(\frac{1}{H^{1-a} - (K-1)^{1-a}} - \frac{1}{H^{1-a} - K^{1-a}} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2^{\alpha\beta}} \right) \left(\frac{1}{H^{1-a}-1} \right) - \left(\frac{1}{N^{\alpha\beta}} - \frac{1}{(N-3)^{\alpha\beta}} \right) \frac{1}{H^{1-a} - (N-3)^{1-a}} +$$

$$+ \sum_{N+3}^{N-4} \frac{1}{H^{1-a} - K^{1-a}} \left(\frac{1}{K^{\alpha\beta}} - \frac{1}{(K+1)^{\alpha\beta}} \right)$$

expressions qui restent finies, comme on peut le voir en séparant la somme Σ en deux par la valeur N' .

On peut ainsi remplacer X par

$$X'' = e^{(2N)^\alpha \Theta i} \sum \frac{1 - e^{(2K)^\alpha - (2N)^\alpha \Theta i}}{N^{\alpha\beta}} \cdot \frac{K^{1-\alpha} - (K-1)^{1-\alpha}}{(H^{1-\alpha} - (K-1)^{1-\alpha})(H^{1-\alpha} - K^1)}$$

expression dont le module est supérieur à

$$R = \sum \frac{2 \sin^2 \frac{(2K)^\alpha - (2N)^\alpha}{2} \Theta}{N^{\alpha\beta} (H^{1-\alpha} - (K-1)^{1-\alpha})(H^{1-\alpha} - K^{1-\alpha})} (-K^{1-\alpha} + (K-1)^{1-\alpha}).$$

Supposons $H = N$, $K = N + \mu$, $|\mu| < \sqrt{\frac{N}{\alpha-1}}$ on aura

$$R > \frac{2 \sin^2 (\alpha-1) \pi \frac{\mu^2}{2N} \left(1 + \frac{\alpha-2}{3} \frac{\mu}{N} + \dots \right)}{(\alpha-1) \mu (\mu-1) N^{\alpha\beta-\alpha}} \left(1 - \alpha \frac{(\alpha-2) \mu (\mu-1)}{12 N^2} + \dots \right)$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{1}{2} (\alpha-1) \pi^2 \sum \frac{\mu^2}{N^{2+\alpha\beta-\alpha}} \text{ ou } \frac{1}{N^{\alpha\beta-\alpha+\frac{1}{2}}}$$

et augmente indéfiniment avec N si $\beta < 1 - \frac{1}{2\alpha}$.

Si $\beta = 1 - \frac{1}{2\alpha}$, on voit de même, quel que soit Θ , que les termes de X'' tels que $|\mu| < \sqrt{\frac{N}{\alpha-1}}$ donnent une somme qui reste finie; et les autres termes donnent une somme de module inférieur à

$$\sum \frac{1}{K^\alpha N^{\alpha\beta} (H^{1-\alpha} - K^{1-\alpha})^2} < \sum \frac{1}{(K-N)^2} < \frac{1}{N} \sum \frac{1}{n^2}$$

expression qui reste finie.

La série $\sum \frac{1}{n^\beta} e^{\pi i n^\alpha + n \Theta i}$ est convergente si $\beta > 1 - \frac{1}{\alpha}$ mais la convergence n'est uniforme que si $\beta > 1 - \frac{1}{2\alpha}$. Si $\alpha > 2$, pour la fonction $f(z)$, l'ordre $\omega = 1 - \beta$; les deux ordres d'infinitude au point $z = 1$ (n° 16) sont $p = 1 - \frac{1}{\alpha} - \beta$ et $q' = 1 - \frac{1}{2\alpha} - \beta$.

Aux autres points du cercle de convergence, qui ne sont pas singuliers, on aurait $p = q' = -\beta$.

24. Considérons la fonction particulière

$$f(z) = \sum_1^{\infty} n e^{\pi i n^3} z^n$$

d'ordre $\omega = 2$, l'ordre d'infinitude du point $z = 1$ est $p = \frac{5}{3}$. Soit:

$$\begin{aligned} g(z) = (1-z) \sum_1^{\infty} n e^{\pi i n^3} z^n &= \sum_1^{\infty} \left(n e^{\pi i n^3} - (n-1) e^{\pi i (n-1)^3} \right) z^n = \\ &= \sum_1^{\infty} z^n e^{\pi i n^3} \left(\frac{\pi i}{3} n^{\frac{1}{3}} + 1 + \frac{\pi^2}{18 n^3} - \frac{2\pi i}{9 n^3} - \frac{\pi^3 i}{2 \cdot 3^4 n} + \dots \right) \end{aligned}$$

$g(z)$ est d'ordre $\omega = \frac{4}{3}$, l'ordre d'infinitude du point $z = 1$ est $p = 1$.

Il semblerait naturel que, l'ordre d'infinitude de $f(z)$ au point 1 étant $\frac{5}{3}$, celui de $(1-z)f(z)$ soit $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$, tandis qu'il est égal à 1. Cela doit provenir des points singuliers qui, sans être sur le cercle de convergence, sont infiniment voisins de $z = 1$, et ne sont pas modifiés par la multiplication par $1-z$.

De même

$$\begin{aligned} (1-z)^2 \sum_1^{\infty} n e^{\pi i n^3} z^n &= \sum_1^{\infty} z^n \left(n e^{\pi i n^3} - 2(n-1) e^{\pi i (n-1)^3} + (n-2) e^{\pi i (n-2)^3} \right) = \\ &= \sum_1^{\infty} z^n e^{\pi i n^3} \left(\frac{-\pi^2}{9 n^3} + \frac{4\pi i}{9 n^3} + \frac{\pi^3 i}{27 n} + \dots \right) \end{aligned}$$

Pour cette fonction $\omega = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$.

Montpellier le 1 novembre 1910

E. Fabry.

MÉMOIRE
SUR
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR
KARL F. SUNDMAN

À HELSINGFORS.

L'objet du présent Mémoire, rédigé sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, est de présenter une exposition d'ensemble et un résumé des recherches sur le problème des trois corps que j'ai publiées dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*.¹

Les coordonnées et les composantes des vitesses des corps, que nous choisissons en première ligne comme inconnues du problème, satisfont à un système bien connu d'équations différentielles qui les définissent comme fonctions du temps t . Nous nous bornons à étudier un mouvement réel, c'est à dire un mouvement où les coordonnées des corps sont réelles pour les valeurs réelles de t .

Ayant défini un tel mouvement en fixant les valeurs des inconnues à l'instant initial, soit $t = 0$, si l'on fait varier t en passant par des valeurs réelles, on trouve que les inconnues restent fonctions holomorphes de t tant que les trois distances entre les corps sont plus grandes que zéro. Quand une des inconnues cesse d'être régulière, on dit aussi que le mouvement cesse d'être régulier. Si cela se produit quand t converge vers une valeur finie t_1 , alors, comme l'a montré d'abord M. PAINLEVÉ,² ou les trois distances convergent vers zéro, ou bien l'une des distances converge vers zéro tandis que les deux autres convergent vers une

¹ *Recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 34, et *Nouvelles recherches sur le problème des trois corps*, l. c. tome 35.

² P. PAINLEVÉ, *Leçons etc.*, professées à Stockholm, Paris 1897.

Acta mathematica. 36. Imprimé le 8 juillet 1912.

valeur finie. Donc, dans le premier cas, tous les trois corps se choquent, et dans le second deux des corps. La question soulevée par M. PAINLEVÉ, de savoir quelles relations doivent exister entre les valeurs des inconnues à l'instant initial pour que les corps se choquent pour une valeur finie donnée t_1 , a été étudiée par M. LEVI-CIVITA¹ pour le cas spécial bien connu appelé »problème restreint», et, sous une forme générale, par M. BISCONCINI² pour le cas où deux seulement des corps se choquent au temps t_1 . Les équations de condition posées par M. BISCONCINI, et qui s'expriment à l'aide de séries infinies, sont très compliquées, et ne sont directement applicables que quand l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'instant initial et t_1 est suffisamment court, condition pour la vérification de laquelle on ne possède pas de criterium. On doit encore noter que M. BISCONCINI, pour obtenir ces résultats, avait fait l'hypothèse que la vitesse angulaire du rayon vecteur entre les deux corps qui se choquent reste finie quand t tend vers t_1 . La limitation qui en résulterait dans les résultats de M. BISCONCINI n'est pourtant qu'apparente, car nous avons démontré que l'hypothèse en question est toujours vraie.

Dans le présent Mémoire, nous étudions d'abord le caractère analytique des inconnues au voisinage d'un instant t_1 où deux des corps se choquent. D'après le principe du prolongement analytique, nous définissons ensuite d'une manière univoque les coordonnées des corps pour les valeurs réelles de t situées au delà de la valeur t_1 , et nous obtenons ainsi un prolongement réel du mouvement après le choc. En prolongeant de la même manière le mouvement au delà de chaque nouveau choc entre deux des corps, nous définissons les coordonnées des corps pour des valeurs de t de plus en plus grandes. Après avoir constaté que les valeurs du temps pour lesquelles on peut ainsi définir les coordonnées ne sauraient admettre une limite supérieure finie t que si les trois distances entre les corps tendent toutes vers zéro quand t tend vers \bar{t} , nous faisons voir que cette dernière éventualité ne peut se présenter que dans le cas où les constantes des aires sont nulles toutes les trois³, d'où résulte enfin que les coordonnées des corps peuvent être définies d'une manière univoque pour toutes les valeurs de t comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, si l'on excepte ce cas spécial.

¹ T. LEVI-CIVITA, *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, *Annali di Matematica*, Ser. III, T. 9, 1903.

² G. BISCONCINI, *Sur le problème des trois corps*, *Acta Mathematica*, T. 30.

³ Au cours de la rédaction définitive de ce travail, M. MITTAG-LEFFLER m'a fait part d'une lettre à lui adressée par WEIERSTRASS et en date du 2 févr. 1889, où WEIERSTRASS dit avoir démontré que les constantes des aires doivent toutes être nulles pour que les trois corps puissent se choquer tous en un même point de l'espace. Cette lettre est publiée pages 55—58 du tome 35 de ce journal.

En continuant nos recherches, nous démontrons ensuite ce théorème intéressant :

Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on peut, les circonstances initiales étant données, indiquer une limite positive au dessous de laquelle les deux plus grandes des distances entre les corps ne descendent jamais.

En nous appuyant sur ce résultat, nous arrivons enfin au théorème suivant, qui constitue le résultat principal de nos recherches :

Si les constantes des aires dans le mouvement des trois corps par rapport à leur centre commun de gravité ne sont pas toutes nulles, on peut trouver une variable τ telle que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de τ qui représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps, et cela quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps.

Je saisis cette occasion d'exprimer ma vive gratitude à M. ERNST LINDELÖF pour les conseils précieux qu'il m'a donnés concernant la rédaction du présent Mémoire.

I.

Les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales connues.

1. Considérons trois corps (points matériels) P_0, P_1, P_2 , qui se meuvent suivant la loi de NEWTON et dont nous supposons les masses m_0, m_1, m_2 toutes finies et plus grandes que zéro. Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du corps P_i par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre commun de gravité des trois corps et ayant des directions fixes dans l'espace.

En désignant encore par t le temps et par r_0, r_1, r_2 les distances $P_1 P_2, P_2 P_0$ et $P_0 P_1$, les équations différentielles du mouvement seront

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_0}{dt} = x'_0, \quad \frac{dx'_0}{dt} = m_1 \frac{x_1 - x_0}{r_2^3} + m_2 \frac{x_2 - x_0}{r_1^3}, \\ \frac{dy_0}{dt} = y'_0, \quad \frac{dy'_0}{dt} = m_1 \frac{y_1 - y_0}{r_2^3} + m_2 \frac{y_2 - y_0}{r_1^3}, \\ \frac{dz_0}{dt} = z'_0, \quad \frac{dz'_0}{dt} = m_1 \frac{z_1 - z_0}{r_2^3} + m_2 \frac{z_2 - z_0}{r_1^3}, \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x'_1, & \frac{dx'_1}{dt} &= m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_0^3} + m_0 \frac{x_0 - x_1}{r_2^3}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= y'_1, & \frac{dy'_1}{dt} &= m_2 \frac{y_2 - y_1}{r_0^3} + m_0 \frac{y_0 - y_1}{r_2^3}, \\ \frac{dz_1}{dt} &= z'_1, & \frac{dz'_1}{dt} &= m_2 \frac{z_2 - z_1}{r_0^3} + m_0 \frac{z_0 - z_1}{r_2^3}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x'_2, & \frac{dx'_2}{dt} &= m_0 \frac{x_0 - x_2}{r_1^3} + m_1 \frac{x_1 - x_2}{r_0^3}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y'_2, & \frac{dy'_2}{dt} &= m_0 \frac{y_0 - y_2}{r_1^3} + m_1 \frac{y_1 - y_2}{r_0^3}, \\ \frac{dz_2}{dt} &= z'_2, & \frac{dz'_2}{dt} &= m_0 \frac{z_0 - z_2}{r_1^3} + m_1 \frac{z_1 - z_2}{r_0^3}. \end{aligned} \right.$$

On a supposé les unités déterminées de manière à rendre la constante de GAUSS égale à 1.

Les équations (1) admettent les intégrales connues suivantes

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i x_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i y_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i z_i = 0,$$

$$(3) \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i x'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i y'_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i z'_i = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=2} m_i (x_i y'_i - y_i x'_i) &= c_0, \\ \sum_{i=0}^{i=2} m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{i=2} m_i (z_i x'_i - x_i z'_i) &= c_2, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{i=2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = 2 \frac{m_0 m_1 m_2}{M} U = - \frac{m_0 m_1 m_2}{M} K,$$

où c_0, c_1, c_2 et K sont des constantes d'intégration et où l'on a

$$(6) \quad U = \frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2},$$

$$(7) \quad M = m_0 + m_1 + m_2.$$

Les distances r_0 , r_1 et r_2 sont données comme fonctions des inconnues x_i , y_i , z_i par les formules

$$(8) \quad \begin{cases} r_0^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ r_1^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2, \\ r_2^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2, \end{cases}$$

où l'on doit prendre la détermination positive des r_i pour les valeurs réelles de t .

2. Dans ce travail nous aurons avant tout à étudier le mouvement des trois corps quand l'une des distances r_0 , r_1 , r_2 ou tend vers zéro ou reste petite par rapport aux deux autres. Supposons pour fixer les idées que r_2 soit cette distance. Il sera alors avantageux de prendre pour variables les coordonnées rectangulaires x , y , z de P_1 par rapport à P_0 et les coordonnées rectangulaires ξ , η , ζ de P_2 par rapport au centre de gravité des corps P_0 et P_1 .

Pour abrégér les formules, nous poserons

$$(9) \quad \lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1},$$

$$(10) \quad g = \frac{M}{m_2(m_0 + m_1)}, \quad h = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}.$$

Alors on aura entre ces nouvelles coordonnées et les coordonnées du n:o 1 les relations

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = -\lambda x - \frac{m_2}{M} \xi, & x_1 = \mu x - \frac{m_2}{M} \xi, & x_2 = \frac{m_0 + m_1}{M} \xi, \\ y_0 = -\lambda y - \frac{m_2}{M} \eta, & y_1 = \mu y - \frac{m_2}{M} \eta, & y_2 = \frac{m_0 + m_1}{M} \eta, \\ z_0 = -\lambda z - \frac{m_2}{M} \zeta, & z_1 = \mu z - \frac{m_2}{M} \zeta, & z_2 = \frac{m_0 + m_1}{M} \zeta, \end{cases}$$

ou réciproquement

$$(12) \quad \begin{cases} x = x_1 - x_0, & y = y_1 - y_0, & z = z_1 - z_0, \\ \xi = g m_2 x_2, & \eta = g m_2 y_2, & \zeta = g m_2 z_2, \end{cases}$$

et, d'après (8), on trouve

$$(13) \quad r_0^2 = (\xi - \mu x)^2 + (\eta - \mu y)^2 + (\zeta - \mu z)^2,$$

$$(14) \quad r_1^2 = (\xi + \lambda x)^2 + (\eta + \lambda y)^2 + (\zeta + \lambda z)^2,$$

$$(15) \quad r^2 \equiv r_2^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

où nous avons écrit pour abréger r au lieu de r_2 . En tenant compte de ces égalités (7)–(15) on tire aisément de (1), (2), (4) et (5) les équations suivantes:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(m_0 + m_1)x}{r^3} = X = -m_2 x \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 \xi \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(m_0 + m_1)y}{r^3} = Y = -m_2 y \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 \eta \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{(m_0 + m_1)z}{r^3} = Z = -m_2 z \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 \zeta \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Xi = -M \xi \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} \right) + \lambda \mu M x \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = H = -M \eta \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} \right) + \lambda \mu M y \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = I = -M \zeta \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} \right) + \lambda \mu M z \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} g \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + h (\xi \eta' - \eta \xi') = ghc_0, \\ g \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + h (\eta \zeta' - \zeta \eta') = ghc_1, \\ g \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + h (\zeta \xi' - \xi \zeta') = ghc_2, \end{cases}$$

$$(19) \quad g \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + h (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 2U - K,$$

où nous avons posé

$$(20) \quad \xi' = \frac{d\xi}{dt}, \quad \eta' = \frac{d\eta}{dt}, \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{dt}.$$

Des équations (16)–(20) on peut tirer réciproquement les équations (1), (2), (4) et (5).

3. Désignons par R la quantité positive (ou nulle) définie par l'égalité

$$(21) \quad R^2 = \frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2}.$$

A l'aide des équations (13), (14) et (15) on aura aussi

$$(21 \text{ bis}) \quad R^2 = gr^2 + h\varrho^2,$$

où l'on a posé

$$(22) \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

de façon que ϱ désigne la distance du corps P_2 au centre de gravité des corps P_0 et P_1 .

Cela posé, LAGRANGE¹ a établi une formule fondamentale qui, avec nos notations, peut s'écrire:

$$(23) \quad \frac{d^2 R^2}{dt^2} = 2(U - K),$$

ou bien

$$(24) \quad R \frac{d^3 R}{dt^3} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = U - K,$$

et dont on constate aisément l'exactitude en s'appuyant sur les équations (15), (16), (17), (19), (21 bis) et (22).

Nous tirerons parti de cette formule de LAGRANGE en la combinant avec une autre, que nous allons déduire de l'intégrale des forces vives.

En différentiant les équations (15), (21 bis) et (22) par rapport à t , on trouve

$$(25) \quad r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt},$$

$$(26) \quad R \frac{dR}{dt} = gr \frac{dr}{dt} + h\varrho \varrho',$$

$$(27) \quad \varrho \varrho' = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta',$$

où

$$(28) \quad \varrho' = \frac{d\varrho}{dt},$$

¹ LAGRANGE, *Essai sur le problème des trois corps*, Œuvres t. VI, p. 240.

et à l'aide de ces expressions on tire des identités

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right)^2 + \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \\ + \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^2.$$

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2 + (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2,$$

$$(gr^2 + h\varrho^2) \left[g \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + h\varrho'^2 \right] = \left(gr \frac{dr}{dt} + h\varrho\varrho' \right)^2 + gh \left(r\varrho' - \varrho \frac{dr}{dt} \right)^2,$$

les égalités suivantes:

$$(29) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^2,$$

$$(30) \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \varrho'^2 + \frac{1}{\varrho^2} (\xi\eta' - \eta\xi')^2 + \frac{1}{\varrho^2} (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + \frac{1}{\varrho^2} (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2,$$

$$(31) \quad g \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + h\varrho'^2 = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{gh}{R^2} \left(r\varrho' - \varrho \frac{dr}{dt} \right)^2.$$

En se servant de ces trois formules, on déduit de l'équation (19) cette nouvelle forme de l'intégrale des forces vives:

$$(32) \quad \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + P = 2U - K,$$

où la quantité

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} P = & \frac{gh}{R^2} \left(r\varrho' - \varrho \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{g}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{g}{r^2} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)^2 + \\ & + \frac{g}{r^2} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\xi\eta' - \eta\xi')^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2, \end{aligned} \right.$$

étant une somme de sept termes positifs ou nuls, est elle-même constamment positive ou nulle (tant que les variables restent réelles).

En éliminant encore U et K entre les équations (24) et (32), on trouve

$$(34) \quad 2R \frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = P - K$$

et

$$(35) \quad R \frac{d^2 R}{dt^2} = P - U.$$

Les équations (32) et (34), que nous n'avons pas rencontrées ailleurs, jouent un rôle très important dans nos recherches.

II.

Détermination d'une limite inférieure des rayons de convergence des développements des coordonnées au voisinage d'un instant où les distances entre les corps sont toutes plus grandes que zéro.

4. Dans la suite nous aurons souvent à nous servir du théorème connu de CAUCHY sur l'existence des intégrales des équations différentielles. En ayant égard au complément qu'y a apporté M. PICARD, nous pouvons énoncer ce théorème comme il suit:¹

Soient $Q_j(q_1, q_2, \dots, q_n)$ des fonctions qui ne contiennent pas t explicitement et qui sont développables suivant les puissances croissantes des différences $q_i - \bar{q}_i$ en séries qui convergent tant que

$$(36) \quad |q_i - \bar{q}_i| < q'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

q'_i désignant des quantités positives. Supposons encore qu'il existe des quantités positives et finies Q'_j telles qu'on ait

$$|Q_j(q_1, q_2, \dots, q_n)| < Q'_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

tant que les variables q_i vérifient les inégalités (36).

Dans ces conditions le système des n équations différentielles

$$\frac{dq_j}{dt} = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

admet une et une seule solution qui est telle que les inconnues q_i tendent vers les valeurs finies données \bar{q}_i quand t tend vers une valeur donnée t . Dans cette solution, les inconnues q_i sont développables suivant les puissances croissantes de $t - t$ en séries qui convergent, du moins tant que

¹ Voir p. ex. PICARD, Traité d'Analyse, t. II, Chap. XI.

$$|t - t| = T',$$

T' désignant le plus petit des quotients

$$\frac{q'_1}{Q'_1}, \frac{q'_2}{Q'_2}, \frac{q'_3}{Q'_3}, \dots, \frac{q'_n}{Q'_n}.$$

De plus les q_i vérifieront les inégalités (36) tant que t vérifie cette dernière inégalité

5. Ayant l'intention d'étudier avant tout un mouvement qui est *réel* pour des valeurs *réelles* du temps, nous ne considérons dans ce travail que les solutions des équations (1) qui ont les propriétés suivantes:

1) Les coordonnées x_i, y_i, z_i prennent à l'instant initial $t = 0$ des valeurs *réelles* et *finies*, telles que les valeurs correspondantes des distances r_0, r_1, r_2 soient toutes *finies* et *plus grandes que zéro*.

2) Les dérivées x'_i, y'_i, z'_i prennent à l'instant initial $t = 0$ des valeurs *réelles* et *finies*.

En vertu des équations (1), (4) et (5) on voit alors immédiatement que $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i$ et z'_i sont des fonctions holomorphes de t à l'instant initial et que les constantes c_0, c_1, c_2 et K ont des valeurs *réelles* et *finies*.

En faisant décrire à la variable t dans son plan un chemin quelconque partant du point $t = 0$, on sait que les fonctions x_i, y_i, \dots , tant qu'elles restent holomorphes, vérifient constamment les équations (1) ainsi que les égalités (2), (3), (4) et (5).

Cela posé, ayant fixé une solution telle qu'il est dit plus haut, faisons varier t par des valeurs *réelles* à partir de la valeur $t = 0$. Il résulte immédiatement de la forme des équations (1) que les inconnues x_i, y_i, \dots , resteront des fonctions holomorphes de t tant que les distances r_0, r_1, r_2 resteront supérieures à zéro.

Désignons par $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{x}'_i, \bar{y}'_i, \bar{z}'_i$ les valeurs (nécessairement *réelles*) vers lesquelles tendent $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ lorsque t tend vers une certaine valeur *réelle* et *finie* t , et admettons que les valeurs correspondantes

$$\bar{r}_0 = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2},$$

$$\bar{r}_1 = \sqrt{(\bar{x}_0 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_0 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_0 - \bar{z}_2)^2},$$

$$\bar{r}_2 = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)^2},$$

des distances r_0, r_1, r_2 sont plus grandes que zéro, de sorte qu'on pourra écrire¹

$$(37) \quad \bar{r}_0, \bar{r}_1 \text{ et } \bar{r}_2 \geq 14z,$$

z désignant une quantité positive dont nous disposerons ultérieurement.

Dans ces conditions x_i, y_i, \dots , seront développables en séries suivant les puissances de $t - \bar{t}$. Nous nous proposons de calculer une limite inférieure des rayons de convergence de ces développements, et, à cet effet, nous appliquerons le théorème du n° 4.

Nous chercherons donc d'abord des limites supérieures des valeurs que prennent les modules des seconds membres des équations (1) pour les valeurs x_i, y_i, \dots , vérifiant les inégalités

$$(38) \quad \begin{cases} |x_i - \bar{x}_i|, |y_i - \bar{y}_i| \text{ et } |z_i - \bar{z}_i| < z_0, \\ |x'_i - \bar{x}'_i|, |y'_i - \bar{y}'_i| \text{ et } |z'_i - \bar{z}'_i| < z'_0, \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2),$$

z_0 et z'_0 désignant deux quantités positives qu'on doit déterminer de telle sorte que les développements des dits membres suivant les puissances des différences $x_i - \bar{x}_i, y_i - \bar{y}_i, \dots$ soient convergents tant que les conditions (38) sont vérifiées.

On voit immédiatement que les seconds membres des équations (1) sont développables suivant les puissances des différences en question tant que les quotients

$\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ le sont. Or on a, d'après (8), par exemple

$$\begin{aligned} r_0^2 = & \bar{r}_0^2 + 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)[(x_2 - \bar{x}_2) - (x_1 - \bar{x}_1)] + [(x_2 - \bar{x}_2) - (x_1 - \bar{x}_1)]^2 \\ & + 2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)[(y_2 - \bar{y}_2) - (y_1 - \bar{y}_1)] + [(y_2 - \bar{y}_2) - (y_1 - \bar{y}_1)]^2 \\ & + 2(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)[(z_2 - \bar{z}_2) - (z_1 - \bar{z}_1)] + [(z_2 - \bar{z}_2) - (z_1 - \bar{z}_1)]^2, \end{aligned}$$

et comme

$$|x_2 - \bar{x}_1|, |y_2 - \bar{y}_1| \text{ et } |z_2 - \bar{z}_1| < r_0,$$

il en résulte que r_0^2 peut se mettre sous la forme

$$\bar{r}_0^2 + P_0(x_i - \bar{x}_i, y_i - \bar{y}_i, z_i - \bar{z}_i),$$

$P_0(x_i - \bar{x}_i, y_i - \bar{y}_i, z_i - \bar{z}_i)$ étant un polynome par rapport aux différences $x_i - \bar{x}_i, y_i - \bar{y}_i, z_i - \bar{z}_i$ dont le module, même lorsqu'on y remplace chaque terme par sa

¹ Le coefficient 14 est introduit pour simplifier certains coefficients dans la suite.

valeur absolue, reste inférieur à l'expression $12 \bar{r}_0 z_0 + 12 z_0^2$ tant que $|x_i - \bar{x}_i|$, $|y_i - \bar{y}_i|$ et $|z_i - \bar{z}_i|$ sont plus petits que z_0 . Donc $\frac{1}{r_0}$ est certainement développable suivant les puissances croissantes des dites différences tant que leurs valeurs absolues sont plus petites que z_0 , si l'on détermine z_0 de telle manière que

$$12 \bar{r}_0 z_0 + 12 z_0^2 < r_0^2$$

ou bien

$$z_0 < \frac{r_0}{6 + 4\sqrt{3}}.$$

Nous donnerons à z_0 la valeur particulière

$$(39) \quad z_0 = \frac{r_0}{14},$$

qui vérifie l'inégalité précédente et qui est d'ailleurs choisie de manière à rendre rationnels les coefficients dans les formules qui suivent. On aura alors

$$(40) \quad |r_0| > \sqrt{r_0^2 - 12 \bar{r}_0 z_0 - 12 z_0^2} = \frac{2}{7} \bar{r}_0,$$

$$|x_2 - x_1| \leq |x_2 - \bar{x}_1| + |x_2 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_1 - x_1| < \frac{8}{7} \bar{r}_0,$$

et par suite

$$(41) \quad \left| \frac{x_2 - x_1}{r_0^3} \right| < \frac{49}{r_0^2} + \frac{1}{4 z_0^2},$$

tant que x_i , y_i et z_i vérifient les inégalités (38).

Mais il résulte de (37) et (39) que

$$(42) \quad z_0 < \frac{1}{2} z$$

et on aura donc, d'après (41),

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{r_0^3} \right| < \frac{1}{4 z^2},$$

tant que x_i , y_i et z_i vérifient les inégalités (38), ou, selon (42), à plus forte raison s'ils vérifient les inégalités

$$(43) \quad |x_i - \bar{x}_i|, |y_i - \bar{y}_i| \text{ et } |z_i - \bar{z}_i| < z, \quad (i = 0, 1, 2),$$

que nous substituerons désormais aux trois premières des inégalités (38).

On trouve de même que, dans ces conditions, les autres quotients analogues à $\frac{x'_2 - \bar{x}_1}{r_0^3}$ qui entrent dans les seconds membres des équations (1) sont tous en valeur absolue plus petits que $\frac{1}{4\kappa^2}$, et il en résulte immédiatement que les expressions des dérivées $\frac{dx'_0}{dt}, \frac{dx'_1}{dt}, \frac{dx'_2}{dt}, \dots$, ont toutes leurs modules inférieurs à

$$\frac{M}{4\kappa^2}.$$

En vertu de (37), on peut conclure de (6) que, t tendant vers t , U tendra vers une valeur \bar{U} qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{m_0 m_1 m_2}{M} \bar{U} \leq \frac{m_1 m_2 + m_2 m_0 + m_0 m_1}{14\kappa}$$

ou, puisque d'après (7)

$$M^2 \geq 3(m_1 m_2 + m_2 m_0 + m_0 m_1),$$

à l'inégalité plus simple

$$\frac{m_0 m_1 m_2}{M} \bar{U} \leq \frac{M^2}{42\kappa}.$$

En observant que

$$\left| \frac{m_0 m_1}{M} K \right|, \left| \frac{m_0 m_2}{M} K \right| \text{ et } \left| \frac{m_1 m_2}{M} K \right| < \frac{M}{4} |K|,$$

on conclut alors de l'égalité (5) que les valeurs \bar{x}'_i, \bar{y}'_i et \bar{z}'_i satisfont aux inégalités

$$|\bar{x}'_i|, |\bar{y}'_i| \text{ et } |\bar{z}'_i| < \sqrt{\frac{M^2}{21 m \kappa} + \frac{M}{4} |K|}, \quad (i = 0, 1, 2),$$

où m désigne la plus petite des masses m_0, m_1 et m_2 . Dès lors, si l'on fait

$$(44) \quad z'_0 = \sqrt{\frac{M^2}{21 m \kappa} + \frac{M}{4} |K|},$$

et si x'_i, y'_i et z'_i vérifient les inégalités (38), on aura

$$|x'_i|, |y'_i| \text{ et } |z'_i| < 2z'_0, \quad (i = 0, 1, 2).$$

En faisant usage des limites supérieures obtenues ci-dessus pour les valeurs absolues des seconds membres des équations (1), on voit donc que les quantités qui, dans les équations (1), correspondent aux quotients $\frac{q'_1}{Q'_1}, \dots, \frac{q'_n}{Q'_n}$ du théorème du n:o 4, sont plus grandes que l'une ou l'autre des deux valeurs

$$\frac{z}{2z'_0} \text{ et } \frac{4z^2z'_0}{M}.$$

Or la première de ces valeurs est la plus petite, car on a

$$\frac{4z^2z'_0}{M} - \frac{z}{2z'_0} - \frac{z}{2Mz'_0} (8zz'_0{}^2 - M) = \frac{z}{2z'_0} \left(\frac{8M}{21m} + 2z|K| - 1 \right),$$

ce qui est une quantité positive puisque m est nécessairement $\leq \frac{M}{3}$.

En vertu du théorème du n:o 4 on en conclut la proposition suivante:

Si, quand t tend par des valeurs réelles vers une valeur réelle et finie t , les coordonnées x_i, y_i et z_i tendent vers les valeurs réelles et finies \bar{x}_i, \bar{y}_i et \bar{z}_i , telles que r_0, r_1 et r_2 satisfassent aux inégalités (37), les coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont développables suivant les puissances croissantes de $t - \bar{t}$ en séries qui convergent du moins tant que

$$(45) \quad |t - \bar{t}| \leq T = \frac{z}{\sqrt{\frac{4M^2}{21mz} + M|K|}}.$$

et les inégalités (43) auront lieu, tant que t vérifie cette inégalité (45).

Les distances r_0, r_1, r_2 étant développables suivant les puissances des différences $x_i - \bar{x}_i, y_i - \bar{y}_i, z_i - \bar{z}_i$, quand les inégalités (43) ont lieu, on voit encore que, sous les conditions admises dans le théorème précédent, les distances r_0, r_1 et r_2 sont développables en séries suivant les puissances croissantes de $t - \bar{t}$ qui convergent tant que t vérifie l'inégalité (45).

Nous dirons, pour abrégé, que le mouvement est régulier dans un intervalle donné, si les coordonnées des corps sont des fonctions holomorphes du temps dans cet intervalle.

III.

Détermination des différents cas qui peuvent se présenter, lorsque le mouvement cesse d'être régulier, pour une valeur réelle et finie de t .

6. Pour embrasser dans nos recherches le mouvement des trois corps depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$, nous devons étudier le mouvement tant pour les valeurs positives de t , en faisant croître t de $t = 0$ à $t = +\infty$, que pour les valeurs négatives, en faisant décroître t de $t = 0$ à $t = -\infty$. Cependant nous pouvons nous borner à considérer les valeurs *positives* de t . En effet, les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales (2), (3), (4) et (5) restant invariables lorsqu'on y change t , x'_i , y'_i , z'_i , c_0 , c_1 et c_2 en $-t$, $-x'_i$, $-y'_i$, $-z'_i$, $-c_0$, $-c_1$ et $-c_2$, on voit que les résultats qu'on obtient pour les valeurs positives de t s'appliquent également aux valeurs négatives de t (puisque'ils restent en vigueur lorsqu'on change les signes de x'_i , y'_i et z'_i à l'instant initial).

Lorsque t croît par des valeurs réelles depuis $t = 0$, ou bien le mouvement restera constamment régulier, quelque grand que soit t , ou bien l'une au moins des inconnues x_i , y_i , ..., cessera d'être régulière quand t tend vers une certaine valeur finie t_1 . Nous allons étudier de plus près cette seconde hypothèse.

On a d'abord ce théorème connu:¹

Si le mouvement est régulier dans l'intervalle de $t = 0$ à $t = t_1$, mais cesse de l'être à l'instant t_1 , la plus petite des distances r_0 , r_1 , r_2 tend vers zéro quand t tend vers t_1 .

En effet, si la plus petite des distances r_0 , r_1 , r_2 ne tendait pas vers zéro quand t tend vers l'instant t_1 , on pourrait trouver une constante positive z , telle qu'on eût par exemple

$$r_0, r_1 \text{ et } r_2 > 14z$$

pour certaines valeurs de t comprises dans l'intervalle de $t_1 - \delta_1$ à t_1 , et cela quelque petite que soit la constante positive δ_1 . En identifiant cette quantité z à la quantité z du numéro précédent et en désignant par t' l'une des valeurs de l'intervalle de $t_1 - \delta_1$ à t_1 pour lesquelles les inégalités ci-dessus sont vérifiées, on conclut du théorème démontré plus haut que le mouvement serait régulier dans l'intervalle de t' à $t' + T$, ce qui implique une contradiction si l'on a choisi δ_1 de telle manière que $T > \delta_1$, d'où $t' + T > t_1$.

¹ Voir p. ex. P. PAINLEVÉ, l. c. page 585.

En vertu du théorème ci-dessus, on peut conclure de l'expression (6) de U que

$$\lim_{t \rightarrow t_1} U = +\infty,$$

et il existe par conséquent une quantité positive δ_0 , telle que

$$U - K > 0$$

pour chaque valeur de t comprise entre $t_1 - \delta_0$ et t_1 . L'équation (23) nous montre dès lors que la dérivée $\frac{dR^2}{dt}$ va constamment en croissant lorsque t croît de $t_1 - \delta_0$ à t_1 , et il existe par suite une quantité positive δ ($\leq \delta_0$) telle que $\frac{dR^2}{dt}$ conserve le même signe et ne s'annule pas dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1 . Donc la quantité R^2 va constamment ou en croissant ou en décroissant dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1 , et tend par conséquent vers une limite déterminée, nulle ou positive, quand t tend vers t_1 .

7. Si l'on a

$$(46) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} R^2 = 0,$$

il résulte de (21) que les trois distances r_0, r_1, r_2 tendent chacune vers zéro quand t tend vers t_1 , et que par suite les trois corps se choquent à l'instant t_1 en un même point de l'espace. Dans ce cas, il est clair que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ sera négative dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1 .

Considérons d'autre part le cas où

$$\lim_{t \rightarrow t_1} R^2 > 0.$$

Il existe alors deux constantes positives, k et δ_2 , telles que l'inégalité

$$(47) \quad R^2 > k$$

ait lieu dans l'intervalle de $t_1 - \delta_2$ à t_1 . Désignons pour un instant par r_m la plus petite des distances r_0, r_1, r_2 . D'après le théorème du numéro précédent, on a

$$\lim_{t \rightarrow t_1} r_m = 0,$$

et il existe par suite une quantité positive δ_3 , telle que

$$(48) \quad r_m < \varepsilon$$

dans tout l'intervalle de $t_1 - \delta_3$ à t_1 , la constante ε étant prise aussi petite qu'on voudra. Soit encore δ la plus petite des constantes δ_2 et δ_3 . Les inégalités (47) et (48) auront lieu simultanément dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1 .

On démontre aisément que, dans l'intervalle de $t_1 - \delta$ à t_1 , r_m désigne une seule et même distance, si l'on a pris ε suffisamment petit.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il se trouverait dans cet intervalle un instant t' tel que r_m désignerait une certaine des distances r_0, r_1, r_2 avant et une autre après cet instant. Pour $t = t'$ ces deux distances seraient égales entre elles et par suite chacune $< \varepsilon$. La troisième distance, étant au plus égale à la somme des deux autres, serait par suite $< 2\varepsilon$.

Les trois distances r_0, r_1, r_2 étant ainsi toutes $< 2\varepsilon$ pour $t = t'$, on aurait, d'après (21),

$$R^2 < 4\varepsilon^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

ce qui est visiblement en contradiction avec l'inégalité (47) si ε est pris suffisamment petit.

C'est par suite une seule et même distance qui tend vers zéro lorsque t tend vers t_1 . En observant que cette distance est supérieure ou égale à la différence des deux autres, on déduit immédiatement de (21) et (47) que ces deux autres distances tendent vers la même limite positive.

En somme nous voyons donc que, lorsque le mouvement cesse d'être régulier à un instant fini t_1 , ou bien les trois corps se choquent tous en un même point de l'espace, ou bien deux des corps se choquent tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite plus grande que zéro.

Cette proposition avait été établie d'une autre manière par M. PAINLEVÉ (loc. cit. page 586).

Nous n'étudierons pas dans ce travail le cas où les trois corps se choquent tous en un même point de l'espace à un instant fini. Au reste nous verrons que cela ne peut avoir lieu que dans le cas particulier où les constantes des aires c_0, c_1, c_2 sont toutes nulles. Les trois corps se meuvent alors constamment dans un même plan passant par leur centre commun de gravité. Quant à leur configuration au voisinage du choc, nous avons établi précédemment ce théorème.¹

Si les trois corps se choquent en un même point de l'espace, ils tendront, à mesure qu'ils s'approchent, de plus en plus ou à former un triangle équilatéral, ou bien à se ranger en ligne droite de telle manière que les rapports de leurs distances tendent vers des limites déterminées.

¹ Recherches sur le problème des trois corps, page 26.

IV.

Cas où deux des corps se choquent à l'instant fini t_1 , tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite plus grande que zéro.

8. Supposons que ce soient les corps P_0 et P_1 qui se choquent à l'instant fini t_1 . Cette supposition ne restreint pas la généralité, car les cas où P_0 et P_2 ou bien P_1 et P_2 se choquent à l'instant t_1 résultent évidemment du premier par un simple changement d'indices.

En employant les coordonnées et les notations du n:o 2, on aura alors

$$(49) \quad \lim_{t=t_1} r = 0,$$

tandis qu'il existe une constante positive b , telle que

$$(50) \quad r_0 > b \text{ et } r_1 > b$$

tant que t reste dans un certain intervalle

$$(51) \quad t_1 - \delta \leq t < t_1.$$

En vertu des égalités (13) et (14), on tire aisément des équations (17)

$$\left| \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right| \text{ et } \left| \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right| \leq M \left(\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\mu}{r_1^2} \right),$$

et on aura par suite, d'après (50),

$$\left| \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right| \text{ et } \left| \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right| < \frac{M}{b^2}$$

quand t vérifie l'inégalité (51). En observant que, selon (19), les dérivées ξ' , η' et ζ' ont des valeurs finies tant que r_0 , r_1 et $r \equiv r_2$ sont plus grandes que zéro, il en résulte successivement que les quantités ξ' , η' , ζ' , ξ , η , ζ , q et q' tendent vers des limites *finies et déterminées* lorsque t tend (par des valeurs réelles) vers t_1 . Comme d'ailleurs

$$(52) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} = x \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{d^2 y}{dt^2} + z \frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

les équations (16) et (19) nous donnent

$$(53) \quad \frac{d^2 r^2}{dt^2} = \frac{2(m_0 + m_1)}{r} - 2L,$$

où l'expression

$$(54) \quad \bar{L} = \frac{h}{g} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + m_2 r^2 \left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3} \right) + m_2 (x\xi + y\eta + z\zeta) \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) \\ - \frac{2m_2}{\mu r_0} - \frac{2m_2}{\lambda r_1} + \frac{K}{g},$$

d'après ce que nous venons de trouver, tendra vers une limite finie et déterminée lorsque t tend vers t_1 . Le second membre de l'équation (53) sera donc, en vertu de (49), plus grand que zéro quand t passe de $t_1 - \delta'$ à t_1 , si l'on a choisi $\delta' (\leq \delta)$ suffisamment petit.

On en conclut que la dérivée $\frac{dr^2}{dt}$ croît avec t dans l'intervalle de $t_1 - \delta'$ à t_1 .

Mais cette dérivée ne peut pas être ≥ 0 pour une valeur $t = t'$ de cet intervalle, puisqu'elle serait alors positive dans l'intervalle de t' à t_1 , de sorte que la quantité positive r^2 devrait croître quand t croît de $t = t'$ à $t = t_1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse (49). Il en résulte que la dérivée $\frac{dr^2}{dt}$ est négative dans l'intervalle de $t_1 - \delta'$ à t_1 et que, par suite, r diminue constamment quand t passe de $t_1 - \delta'$ à t_1 .

9. Multiplions maintenant l'équation (19) par r et faisons tendre t vers t_1 . En ayant égard à (6), (49), (50) et en observant que ξ' , η' , ζ' tendent vers des limites finies, nous obtenons

$$(55) \quad \lim_{t=t_1} r \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = 2(m_0 + m_1),$$

et par suite, en vertu de (29),

$$(56) \quad \lim_{t=t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \lim_{t=t_1} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \lim_{t=t_1} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \lim_{t=t_1} r \frac{dr}{dt} = 0.$$

Or les équations (16) donnent

$$(57) \quad x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = m_2 (x\eta - y\xi) \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) = m_2 (r_1 - r_0) \frac{x\eta - y\xi}{r_0} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_0 r_1^2} + \frac{1}{r_0^2 r_1} \right).$$

On a

$$x\eta - y\xi = x(\eta - \mu y) - y(\xi - \mu x),$$

et comme, d'après (13) et (15),

$$\begin{aligned} |x| \text{ et } |y| &\leq r, \\ |\xi - \mu x| \text{ et } |\eta - \mu y| &\leq r_0, \end{aligned}$$

on en conclut

$$|x\eta - y\xi| \leq 2rr_0,$$

d'où suit, en vertu de (50),

$$\left| \frac{x\eta - y\xi}{r_0} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_0 r_1^2} + \frac{1}{r_0^2 r_1} \right) \right| \leq \frac{6r}{b^3}.$$

En observant encore que $|r_1 - r_0| \leq r$, on peut donc tirer de (57) l'égalité suivante

$$(58) \quad \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{6m_2 \psi_0}{b^3} r^2, \quad (t_1 - \delta' \leq t < t_1),$$

où la quantité ψ_0 satisfait à l'inégalité

$$(59) \quad |\psi_0| \leq 1.$$

En intégrant, on en conclut

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)_{t=t'} + \int_{t'}^t \frac{6m_2 \psi_0}{b^3} r^2 dt, \quad (t_1 - \delta' \leq t \leq t' < t_1),$$

ou encore, puisque r diminue constamment lorsque t passe de $t_1 - \delta'$ à t_1 ,

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)_{t=t'} + \psi'_0 r^2 (t - t'),$$

où

$$(60) \quad |\psi'_0| \leq \frac{6m_2}{b^3}.$$

Faisons tendre t' vers t_1 ; nous aurons, en vertu de (56),

$$(61) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \psi'_0 r^2 (t_1 - t), \quad (t_1 - \delta' \leq t < t_1),$$

et, en considérant les expressions

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \text{ et } z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2},$$

nous trouverons par un calcul analogue

$$(62) \quad \begin{cases} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = \psi'_1 r^2 (t_1 - t), \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = \psi'_2 r^2 (t_1 - t), \end{cases} \quad (t_1 - \delta' \leq t < t_1),$$

où les quantités ψ'_1 et ψ'_2 vérifient les inégalités

$$(63) \quad |\psi'_1| \leq \frac{6 m_2}{b^3} \text{ et } |\psi'_2| \leq \frac{6 m_2}{b^3}.$$

10. Nous déduirons dans ce numéro les valeurs limites, pour $t = t_1$, de certaines expressions que nous aurons à considérer dans la suite.

En différentiant le quotient $\frac{x}{r}$, on trouve aisément

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \left[z \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) - y \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right],$$

d'où résulte, d'après (61) et (62)

$$(64) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right) = \psi' (t_1 - t), \quad (t_1 - \delta' \leq t < t_1),$$

où

$$(65) \quad |\psi'| \leq \frac{12 m_2}{b^3}.$$

De l'égalité (64) on conclut que $\frac{x}{r}$ tend vers une valeur déterminée lorsque t tend vers t_1 , et d'une manière analogue on trouve qu'il en est de même des quotients $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$. Nous pouvons par suite écrire

$$(66) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{x}{r} = \varphi, \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{y}{r} = \chi, \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{z}{r} = \psi,$$

φ , χ et ψ désignant des constantes réelles qui vérifient évidemment l'égalité

$$(67) \quad \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1.$$

Les égalités (66) expriment analytiquement le postulat de M. BISCONCINI dont nous avons parlé dans l'introduction, et qui se trouve ainsi démontré.

Introduisons maintenant les expressions (61) et (62) dans l'équation (29). En faisant ensuite tendre t vers t_1 , on trouve

$$\lim_{t \rightarrow t_1} r \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \lim_{t \rightarrow t_1} r \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

et, d'après (55),

$$(68) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} r \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2(m_0 + m_1),$$

d'où suit encore, en observant que r diminue quand t tend en croissant vers t_1 ,

$$(69) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} V r \frac{dr}{dt} = -V \sqrt{2(m_0 + m_1)}.$$

Multiplions par $-y$ l'équation (61) et par z la dernière des équations (62); en ajoutant les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$r^2 \frac{dx}{dt} = x r \frac{dr}{dt} + N r^3 (t_1 - t),$$

où N désigne une quantité qui reste finie quand t tend vers t_1 . Au moyen des égalités (66) et (69) on en tire la première des égalités

$$(70) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_1} V r \frac{dx}{dt} = -\varphi V \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} V r \frac{dy}{dt} = -\chi V \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \\ \lim_{t \rightarrow t_1} V r \frac{dz}{dt} = -\psi V \sqrt{2(m_0 + m_1)}, \end{cases}$$

dont les deux dernières s'obtiennent d'une manière semblable.

V.

Introduction d'une nouvelle variable indépendante u .

II. Nous introduirons maintenant au lieu de t une nouvelle variable u définie par l'équation

$$(71) \quad dt = r du, \quad (t = t_0 \text{ pour } u = 0).$$

d'où suit

$$(71 \text{ bis}) \quad u = \int_{t_0}^t \frac{dt}{r}$$

ou

$$(71 \text{ ter}) \quad t - t_0 = \int_0^u r du,$$

t_0 désignant une constante réelle que nous fixerons d'une manière convenable chaque fois que cette variable u sera employée.

En posant

$$(72) \quad x' = \frac{dx}{du}, \quad y' = \frac{dy}{du}, \quad z' = \frac{dz}{du}, \quad r' = \frac{dr}{du},$$

ou bien

$$(72 \text{ bis}) \quad x' = r \frac{dx}{dt}, \quad y' = r \frac{dy}{dt}, \quad z' = r \frac{dz}{dt}, \quad r' = r \frac{dr}{dt},$$

les équations (16) et (19) donnent

$$(73) \quad \begin{cases} \frac{dx'}{du} = \frac{r'}{r} x' - \frac{(m_0 + m_1)x}{r} + r^2 X, \\ \frac{dy'}{du} = \frac{r'}{r} y' - \frac{(m_0 + m_1)y}{r} + r^2 Y, \\ \frac{dz'}{du} = \frac{r'}{r} z' - \frac{(m_0 + m_1)z}{r} + r^2 Z, \end{cases}$$

$$(74) \quad g(x'^2 + y'^2 + z'^2) + hr^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = r^2(2U - K).$$

Multiplions ces quatre équations par $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \frac{1}{gr}$ et faisons la somme; nous obtiendrons, après quelques réductions,

$$(75) \quad \frac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + rL,$$

où

$$(76) \quad L = xX + yY + zZ + \frac{2m_2(m_0 + m_1)}{m_0 r_0} + \frac{2m_2(m_0 + m_1)}{m_1 r_1} - \frac{h}{g} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{K}{g}.$$

Posons encore

$$(77) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{r'}{r} x' - \frac{(m_0 + m_1)x}{r}, \\ \beta = \frac{r'}{r} y' - \frac{(m_0 + m_1)y}{r}, \\ \gamma = \frac{r'}{r} z' - \frac{(m_0 + m_1)z}{r}. \end{cases}$$

En différentiant ces expressions et en faisant usage des égalités (73) et (75), on trouve

$$(78) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = X r r' + L x', \\ \frac{d\beta}{du} = Y r r' + L y', \\ \frac{d\gamma}{du} = Z r r' + L z'. \end{cases}$$

Cela posé, les équations (15), (16), (17), (19), (71), ou, ce qui revient au même, les équations (1), (2), (5), (8) et (71) peuvent être remplacées par les équations simultanées suivantes

$$(79) \quad \begin{cases} \frac{dr}{du} = r', & \frac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + rL, & \frac{dt}{du} = r, \\ \frac{dx}{du} = x', & \frac{dx'}{du} = \alpha + r^2 X, & \frac{d\alpha}{du} = X r r' + L x', \\ \frac{dy}{du} = y', & \frac{dy'}{du} = \beta + r^2 Y, & \frac{d\beta}{du} = Y r r' + L y', \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{dz}{du} = z', & \frac{dz'}{du} = \gamma + r^2 Z, & \frac{d\gamma}{du} = Z r r' + L z', \\ \frac{d\xi}{du} = r \xi', & \frac{d\eta}{du} = r \eta', & \frac{d\zeta}{du} = r \zeta', \\ \frac{d\xi'}{du} = r \Xi, & \frac{d\eta'}{du} = r H, & \frac{d\zeta'}{du} = r H. \end{array} \right.$$

Ces dix-huit équations entre les dix-huit inconnues

$$(I) \quad r, r', t, x, x', \alpha, y, y', \beta, z, z', \gamma, \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta',$$

déterminent ces inconnues, si l'on donne leurs valeurs pour une certaine valeur de u .

Soit t_0 une valeur quelconque de l'intervalle $0 \leq t < t_1$ et désignons par (I_0) les valeurs des quantités (I) pour $t = t_0$. Les distances r_0, r_1, r_2 étant supérieures à zéro pour $t = t_0$, les variables du n:o 1 et par conséquent aussi les inconnues (I) sont développables suivant les puissances de $t - t_0$, si $|t - t_0|$ est suffisamment petit. En vertu du théorème de CAUCHY, cité au n:o 4, on conclut alors de l'équation (71) que la variable t est elle-même développable en série suivant les puissances de u quand $|u|$ est plus petit qu'une certaine valeur. En substituant pour t cette série dans les expressions des inconnues (I) , on obtiendra évidemment des fonctions (I) de la variable u qui vérifient les équations (79). On a ainsi une solution de ces équations où les inconnues (I) sont holomorphes et admettent pour $u = 0$ les mêmes valeurs qu'elles avaient pour $t = t_0$.

Mais, d'après le théorème de CAUCHY, le système (79) n'a qu'une seule solution telle que les inconnues soient holomorphes pour $u = 0$ et admettent pour $u = 0$ des valeurs données. Si l'on cherche directement la solution des équations (79) correspondant aux valeurs initiales (I_0) pour $u = 0$, on retombera donc sur celle que nous venons de déduire de la solution donnée des équations (1). D'ailleurs, r étant > 0 pour $t = t_0$, il résulte de l'égalité (71) que u est aussi développable en série suivant les puissances de $t - t_0$ quand $|t - t_0|$ est assez petit, et, en substituant cette expression de u dans la solution du système, on retrouvera la solution des équations (1) d'où nous sommes partis.

Pour la recherche des quantités (I) on pourra donc chaque fois employer celui des systèmes (1) ou (79) ou (16) et (17) qui présente les plus grands avantages. La distance r n'entrant pas en dénominateur dans les seconds membres des équations (79), ce système sera en général préférable quand r devient petit par rapport aux deux autres distances.

12. Le système (79) est évidemment plus général que le système des équations (16) et (17) d'où nous sommes partis, et qui est équivalent au système des équations (1), (2) et (3). Il n'est donc pas sans intérêt de faire voir par une méthode directe que, en choisissant les valeurs initiales (I_0) que doivent prendre les inconnues (I) pour $u=0$ de telle façon qu'elles vérifient à la fois les égalités (77) et les égalités

$$(80) \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & rr' = xx' + yy' + zz', \\ \frac{g}{r^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + h(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 2M \left(\frac{1}{m_0 r_0} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r} \right) - K, \end{cases}$$

[cf. l'égalité (19)], où K est la même constante qui figure explicitement dans le système (79), à savoir dans l'expression L , et en introduisant, dans la solution du système (79) qui correspond à ces valeurs initiales, t comme variable indépendante au lieu de u , on aura effectivement une solution de notre problème où la constante des forces vives est égale à K .

On constate d'abord aisément que le système (79) admet les intégrales

$$\begin{aligned} r \left(\alpha - \frac{r'}{r} x' + \frac{(m_0 + m_1)x}{r} \right) &= \bar{\alpha}, \\ r \left(\beta - \frac{r'}{r} y' + \frac{(m_0 + m_1)y}{r} \right) &= \bar{\beta}, \\ r \left(\gamma - \frac{r'}{r} z' + \frac{(m_0 + m_1)z}{r} \right) &= \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Comme les valeurs initiales (I_0) vérifient les égalités (77), les constantes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont toutes nulles, et, puisque r ne s'annule pas identiquement, il s'ensuit que les égalités (77) sont vérifiées quel que soit u .

En éliminant α , β et γ entre (77) et (79), on retrouve les équations (73), lesquelles, lorsqu'on introduit t au lieu de u comme variable indépendante, se ramènent aux équations (16). De même, si, dans les équations qui figurent dans les deux dernières lignes de (79), on rétablit t comme variable indépendante, on retrouve les égalités (17).

Il nous reste seulement à faire voir que la quantité r , qui figure parmi les inconnues du système (79), ainsi que la constante K , qui entre dans le même système, ont bien la même signification que dans les égalités (16), (17) et (19). A cet effet, nous posons

$$(81) \quad \begin{cases} W = rr' - xx' - yy' - zz', \\ G = \frac{g}{r^2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + h (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - 2M \left(\frac{1}{m_0 r_0} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r} \right) + K. \end{cases}$$

A l'aide des égalités (13), (14) et (76) qui définissent r_0 , r_1 et L , on conclut facilement de (79) que les quantités W et G vérifient les équations linéaires

$$(82) \quad \begin{cases} \frac{dW}{du} = -\frac{r^2}{g} G + \frac{r'}{r} W, \\ \frac{dG}{du} = \frac{2M}{m_2 r^3} W. \end{cases}$$

Puisque les valeurs initiales (I_0) vérifient par hypothèse les égalités (80), W et G s'annulent pour $u = 0$. Or les équations (82) n'admettent qu'une seule solution jouissant de cette propriété, qui est évidemment la solution

$$W \equiv 0, \quad G \equiv 0.$$

Donc W et G s'annulent identiquement ou, ce qui revient au même, l'équation (74) et l'équation

$$(83) \quad rr' = xx' + yy' + zz'$$

subsistent pour toutes les valeurs de u ou de t .

De l'égalité (83) on conclut en intégrant que la différence

$$r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

garde une valeur constante, et, puisqu'elle s'annule par hypothèse pour $u = 0$, elle est identiquement nulle, de sorte que l'inconnue r satisfait bien à l'égalité (15).

En introduisant enfin dans l'équation (74) t comme variable indépendante au lieu de u , on retrouve l'égalité (19), d'où l'on conclut que K désigne bien la constante des forces vives de la solution des équations (16) et (17) qui coïncide avec la solution considérée du système (79).

VI.

Étude du cas où l'une des distances est petite par rapport aux deux autres.

13. Supposons maintenant que le mouvement soit régulier dans l'intervalle $0 \leq t < t_1$, t_1 désignant un instant *fini*, et adoptons les variables du n:o 11. Soient¹

$$(K_1) \quad (r)_1, (r_0)_1, (r_1)_1, (r')_1, x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1, \\ q_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

les valeurs vers lesquelles tendent les quantités

$$(K) \quad r \equiv r_2, r_0, r_1, r', x, y, z, x', y', z', \\ q, \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \alpha, \beta, \gamma,$$

quand t tend par des valeurs réelles vers t_1 . Il est évident que les quantités (K_1) sont *finies* si le mouvement est régulier pour $t = t_1$, et nous verrons dans le numéro 14 qu'il en est de même dans le cas où un choc se produit à l'instant t_1 .

Admettons de plus que

$$(84) \quad (r)_1 < \frac{z_1}{2}$$

et

$$(85) \quad q_1 \geq 14 z_1,$$

z_1 désignant une constante positive dont nous déterminerons plus tard la valeur. Nous nous plaçons donc dans le cas où la distance $r \equiv r_2$ est petite par rapport aux deux autres r_0 et r_1 .

Nous allons d'abord démontrer que la variable u tend vers une limite finie u_1 lorsque t tend vers t_1 .

Cela est évident, d'après (71 bis), dans le cas où $(r)_1 > 0$, puisque la limite inférieure de r dans l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ est alors positive (on pourra prendre pour t_0 une valeur quelconque comprise dans l'intervalle $0 \leq t < t_1$).

Si $(r)_1 = 0$, nous retombons sur le cas étudié aux n:os 8, 9 et 10, où la distance $r \equiv r_2$ tend vers zéro quand t tend vers t_1 , les deux autres distances r_0

¹ Les quantités $x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1$ employées ici ne doivent pas être confondues avec les quantités du n:o 1.

et r_1 tendant vers une valeur plus grande que zéro. L'équation (69) ayant alors lieu, il existe une constante $\delta'' (< \delta')$ telle qu'on ait par exemple

$$(86) \quad Vr \frac{dr}{dt} < -V\overline{m_0 + m_1}$$

pendant que t passe de $t_1 - \delta''$ à t_1 . Ecrivons maintenant l'intégrale (71 bis) sous la forme

$$u = \int_{t_0}^{t_1 - \delta''} \frac{dt}{r} + \int_{t_1 - \delta''}^t \frac{dt}{r}.$$

La dérivée $\frac{dr}{dt}$ étant constamment négative quand t passe de $t_1 - \delta''$ à t_1 , on pourra, dans la seconde intégrale, introduire r comme variable au lieu de t , et, en tenant compte de (86), on trouve ainsi

$$\int_{t_1 - \delta''}^t \frac{dt}{r} < \int_r^{r''} \frac{1}{V\overline{m_0 + m_1}} \frac{dr}{Vr} = \frac{2}{V\overline{m_0 + m_1}} (Vr'' - Vr),$$

où r'' désigne la valeur de r pour $t = t_1 - \delta''$. Cette inégalité montre que l'intégrale qui figure au premier membre tend vers une valeur finie quand t tend vers t_1 ou bien r vers zéro. L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1 - \delta''} \frac{dt}{r}$$

étant finie, u tendra donc bien vers une limite finie, comme nous l'avions affirmé.

14. Nous voulons maintenant faire voir que les inconnues (I) des équations (79) et par suite aussi les quantités (K) sont développables suivant les puissances de $u - u_1$, et déterminer une limite inférieure des rayons de convergence de ces développements. A cet effet nous devons d'abord trouver des limites supérieures des valeurs que prennent, pour $t = t_1$, les inconnues (I) ainsi que les modules des seconds membres des équations (79).

Supposons en premier lieu que $(r)_1 > 0$. Par des considérations géométriques simples, on voit que

$$(r_0)_1 \text{ et } (r_1)_1 > q_1 - (r)_1.$$

d'où résulte, en vertu des hypothèses (84) et (85),

$$(\dot{r}_0)_1 \text{ et } (r_1)_1 > \frac{27}{2} z_1$$

et par suite

$$\frac{M}{m_0(r_0)_1} + \frac{M}{m_1(r_1)_1} < \frac{2M(m_0 + m_1)}{27 m_0 m_1 z_1}.$$

En posant

$$(87) \quad \mathcal{A}_1 = \frac{m_2(m_0 + m_1)^2}{27 m_0 m_1 z_1} + \frac{|K|}{4g},$$

on conclut dès lors de (6) et (74) l'inégalité

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 < 2(r)_1 [m_0 + m_1 + 2\mathcal{A}_1(r)_1],$$

d'où suit

$$|x'_1|, |y'_1|, |z'_1| \text{ et } |(r')_1| < \sqrt{2(r)_1 [m_0 + m_1 + 2\mathcal{A}_1(r)_1]}$$

et, d'après (77),

$$|\alpha_1|, |\beta_1| \text{ et } |\gamma_1| < 3(m_0 + m_1) + 4\mathcal{A}_1(r)_1.$$

En vertu de l'hypothèse (84), on aura par suite les inégalités

$$(88) \quad |x'_1|, |y'_1|, |z'_1| \text{ et } |(r')_1| < \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)},$$

$$(89) \quad |\alpha_1|, |\beta_1| \text{ et } |\gamma_1| < 3(m_0 + m_1) + 2\mathcal{A}_1 z_1,$$

ainsi que

$$(90) \quad |x_1|, |y_1| \text{ et } |z_1| < \frac{z_1}{2}.$$

Considérons maintenant le cas où $(r)_1 = 0$ pour $t = t_1$. On a alors

$$(91) \quad x_1 = y_1 = z_1 = (r)_1 = 0$$

et, d'après (69), (70) et (72 bis),

$$(92) \quad x'_1 = y'_1 = z'_1 = r'_1 = 0,$$

et enfin, d'après (66), (69), (70), (72 bis) et (77),

$$(93) \quad \alpha_1 = (m_0 + m_1) \varphi, \quad \beta_1 = (m_0 + m_1) \chi, \quad \gamma_1 = (m_0 + m_1) \psi,$$

d'où il suit que les inégalités (88), (89) et (90) sont vérifiées aussi dans l'hypothèse actuelle.

Cherchons maintenant des limites supérieures des modules des seconds membres des équations (79), en admettant que les inconnues (I) vérifient les conditions

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} |r - (r)_1|, |x - x_1|, |y - y_1|, |z - z_1|, |\xi - \xi_1|, |\eta - \eta_1| \text{ et } |\zeta - \zeta_1| < \frac{z_1}{2}, \\ |r' - (r')_1|, |x' - x'_1|, |y' - y'_1| \text{ et } |z' - z'_1| < k', \\ |\xi' - \xi'_1|, |\eta' - \eta'_1| \text{ et } |\zeta' - \zeta'_1| < z', \\ |\alpha - \alpha_1|, |\beta - \beta_1| \text{ et } |\gamma - \gamma_1| < \bar{z}; \quad |t - t_1| < t'. \end{array} \right.$$

Les constantes k' , z' , \bar{z} et t' sont des quantités finies et positives, dont nous fixerons plus tard les valeurs.

On trouve, d'après (13),

$$\begin{aligned} r_0^2 = & \varrho_1^2 + 2\xi_1 [(\xi - \xi_1) - \mu(x - x_1) - \mu x_1] + [(\xi - \xi_1) - \mu(x - x_1) - \mu x_1]^2 \\ & + 2\eta_1 [(\eta - \eta_1) - \mu(y - y_1) - \mu y_1] + [(\eta - \eta_1) - \mu(y - y_1) - \mu y_1]^2 \\ & + 2\zeta_1 [(\zeta - \zeta_1) - \mu(z - z_1) - \mu z_1] + [(\zeta - \zeta_1) - \mu(z - z_1) - \mu z_1]^2, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$(95) \quad r_0^2 = \varrho_1^2 + P_1,$$

P_1 étant un polynome par rapport aux variables

$$x - x_1, y - y_1, z - z_1, \xi - \xi_1, \eta - \eta_1, \zeta - \zeta_1, x_1, y_1 \text{ et } z_1.$$

En observant que

$$(96) \quad |\xi_1|, |\eta_1| \text{ et } |\zeta_1| \leq \varrho_1,$$

on constate, en vertu des inégalités (90) et (94), que

$$|P_1| < 12 \varrho_1 z_1 + 12 z_1^2,$$

d'où il suit, d'après (85),

$$|P_1| < \frac{45}{40} \varrho_1^2.$$

D'après le calcul qui précède, cette inégalité aura lieu encore si, dans le polynôme P_1 , on remplace chaque terme par sa valeur absolue, et on voit donc que, sous les conditions (84), (85) et (94), le quotient $\frac{I}{r_0}$ est développable suivant les puissances des différences $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$ et $\zeta-\zeta_1$. De l'égalité (95) et de la dernière inégalité ci-dessus il résulte d'ailleurs aisément qu'on a, dans les mêmes conditions,

$$(97) \quad |r_0| > \frac{2}{7} \varrho_1,$$

ou encore, d'après (85),

$$(98) \quad |r_0| > 4 z_1.$$

En partant de l'équation (14), on conclut d'une manière analogue que r_1 vérifie l'inégalité

$$(99) \quad |r_1| > \frac{2}{7} \varrho_1$$

ou encore

$$(100) \quad |r_1| > 4 z_1,$$

et que $\frac{I}{r_1}$ est développable suivant les puissances des différences $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$, $\zeta-\zeta_1$ du moins tant que les inégalités (84), (85) et (94) ont lieu.

Les seconds membres des équations (79) étant des polynômes de $\frac{I}{r_0}$, $\frac{I}{r_1}$ et des inconnues (I), nous pouvons donc affirmer qu'ils sont certainement développables suivant les puissances des différences $r-(r)_1$, $x-x_1$, ..., si les conditions (84), (85) et (94) sont vérifiées.

Les conditions (84), (85) et (94) entraînent encore les inégalités suivantes:

$$(101) \quad \left| \frac{\xi}{r_0^3} \right|, \left| \frac{\eta}{r_0^3} \right|, \left| \frac{\zeta}{r_0^3} \right|, \left| \frac{\xi}{r_1^3} \right|, \left| \frac{\eta}{r_1^3} \right| \text{ et } \left| \frac{\zeta}{r_1^3} \right| < \frac{15}{64 z_1^2},$$

$$\left| \frac{x}{r_0^3} \right|, \left| \frac{y}{r_0^3} \right|, \left| \frac{z}{r_0^3} \right|, \left| \frac{x}{r_1^3} \right|, \left| \frac{y}{r_1^3} \right| \text{ et } \left| \frac{z}{r_1^3} \right| < \frac{1}{64 z_1^2}.$$

dont nous avons besoin pour calculer une limite supérieure des modules des seconds membres des équations (79).

Démontrons par exemple la première des inégalités (101). Il résulte de (94) et (85),

$$\xi = \xi_1 + z_1 < \frac{1}{14} q_1,$$

d'où suit, en vertu de (96), $|\xi| < \frac{15}{14} q_1$, ou encore, d'après (97),

$$\left| \frac{\xi}{r_0^3} \right| < \frac{7.35}{16 q_1^2},$$

et par suite, en vertu de l'hypothèse (85),

$$\left| \frac{\xi}{r_0^3} \right| < \frac{15}{64 z_1^2}.$$

Les autres inégalités qui figurent dans la première ligne de (101) se démontrent d'une manière analogue.

Les inégalités de la seconde ligne de (101) résultent immédiatement des inégalités (98) et (100), en observant qu'on a, d'après (90) et (94),

$$(102) \quad |x|, |y| \text{ et } |z| < x_1.$$

Cela posé, en remontant aux définitions (16), (17), (76) des quantités X, Y, Z, Ξ, H, H, L , on déduit des résultats (98), (100), (101), (102) et des conditions (94), par un calcul très simple, les inégalités suivantes

$$(103) \quad \begin{cases} |X|, |Y| \text{ et } |Z| < \frac{m_2}{2 z_1^2}, \\ |\Xi|, |H| \text{ et } |H| < \frac{M}{2 z_1^2}, \\ |L| < \lambda_1, \end{cases}$$

où

$$(104) \quad \lambda_1 = \frac{m_2}{2 z_1} \left(3 + \frac{(m_0 + m_1)^2}{m_0 m_1} \right) + \frac{m_2 (m_0 + m_1)^2}{M m_0 m_1} (V_1^2 + 6 V_1 z' + 3 z'^2) + \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{M} |K|,$$

la vitesse V_1 étant donnée par la formule

$$(105) \quad V_1 = \sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2}.$$

Cette quantité V_1 est certainement finie, ce qui résulte de l'égalité (74) dans le cas où $(r)_1 > 0$, et des résultats du n° 8 dans le cas où $(r)_1 = 0$.

Comme d'ailleurs, d'après (84), (88), (89), (94) et (105),

$$\begin{aligned} |r| &< z_1, \\ |x'|, |y'|, |z'| \text{ et } |r'| &< k' + \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}, \\ |\xi'|, |\eta'| \text{ et } |\zeta'| &< V_1 + z', \\ |\alpha|, |\beta| \text{ et } |\gamma| &< z + 3(m_0 + m_1) + 2\mathcal{A}_1 z_1, \end{aligned}$$

les inégalités (103) entraînent les suivantes

$$\begin{aligned} |m_0 + m_1 + rL| &< m_0 + m_1 + \lambda_1 z_1, \\ |\alpha + r^2 X|, |\beta + r^2 Y| \text{ et } |\gamma + r^2 Z| &< \bar{z} + \frac{m_2}{2} + 3(m_0 + m_1) + 2\mathcal{A}_1 z_1, \\ |Xrr' + Lx'|, |Yrr' + Ly'| \text{ et } |Zrr' + Lz'| &< \left(\lambda_1 + \frac{m_2}{2z_1}\right) [k' + \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}], \\ |r\xi'|, |r\eta'| \text{ et } |r\zeta'| &< z_1(V_1 + z'), \\ |r\Xi|, |rH| \text{ et } |r\Pi| &< \frac{M}{2z_1}. \end{aligned}$$

En remontant au système (79), on en conclut que les quantités qui, dans le cas que nous considérons ici, correspondent aux quotients $\frac{q'_1}{Q'_1}, \frac{q'_2}{Q'_2}, \dots, \frac{q'_n}{Q'_n}$ du théorème du n° 4, sont plus grandes que la plus petite des quantités

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{2[k' + \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}]}, \quad \frac{k'}{m_0 + m_1 + \lambda_1 z_1}, \quad \frac{k'}{\bar{z} + \frac{m_2}{2} + 3(m_0 + m_1) + 2\mathcal{A}_1 z_1}, \\ \left(\lambda_1 + \frac{m_2}{2z_1}\right) \frac{z}{[k' + \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}]}, \quad \frac{1}{2(V_1 + z')}, \quad \frac{2z_1 z'}{M}, \quad \frac{\tau'}{z_1}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous donnerons à τ' une valeur telle que $\frac{\tau'}{z_1}$ soit plus grand que les autres quotients, et nous choisirons pour k' , z' et z les valeurs

$$(106) \quad k' = \sqrt{z_1(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}, \quad z' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{z_1}}, \quad \bar{z} = m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1.$$

Les expressions ci-dessus se présentent alors sous la forme

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{z_1}(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}{4(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}, \quad \frac{V_{z_1}(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}{m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1}, \quad \frac{V_{z_1}(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}{\frac{m_2}{2} + 4(m_0 + m_1) + 3\mathcal{A}_1 z_1} \\ \frac{V_{z_1}(m_0 + m_1 + \mathcal{A}_1 z_1)}{2\mathcal{A}_1 z_1 + m_2}, \quad \frac{1}{2V_1 + \sqrt{\frac{M}{z_1}}}, \quad \sqrt{\frac{z_1}{M}}. \end{array} \right.$$

En désignant par Q'_2 la plus petite de ces quantités, le théorème de CAUCHY cité au n:o 4 nous permet dès lors d'affirmer:

1) que, dans la solution des équations (79) qui se déduit de la solution donnée des équations (1), les inconnues (I) ou plus généralement les quantités (K) sont développables en séries suivant les puissances croissantes de $u - u_1$;

2) que ces séries convergent tant que

$$(108) \quad |u - u_1| < Q'_2,$$

3) que les inégalités (94) auront lieu tant que u vérifie l'inégalité (108).

VII.

Définition d'une continuation réelle du mouvement après un choc.

15. Considérons maintenant plus en détail le cas déjà traité au n:o 8, où l'une des distances tend vers zéro et où l'on a

$$\lim_{t=t_1} R = R_1,$$

R_1 étant une quantité positive. En supposant toujours que ce soit la distance $r \equiv r_2$ qui tend vers zéro, on aura, d'après (21 bis),

$$q_1 = \frac{R_1}{Vh},$$

et en posant

$$z_1 = \frac{R_1}{14 Vh},$$

les inégalités (84) et (85) auront lieu, de sorte que nous nous trouvons dans le cas traité aux n:os 13 et 14. En vertu des résultats obtenus plus haut, les in-

connues (I) seront donc développables en séries suivant les puissances de $(u - u_1)$. A l'aide des égalités (91), (92), (93), et en observant que

$$(r_0)_1 = (r_1)_1 = q_1,$$

on calcule sans peine les premiers termes de ces séries; on trouve ainsi:

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi = \xi_1 + \frac{m_0 + m_1}{6} \xi'_1 (u - u_1)^3 + \dots, & \xi' = \xi'_1 - \frac{M(m_0 + m_1)}{6 q_1^3} \xi_1 (u - u_1)^3 + \dots, \\ \eta = \eta_1 + \frac{m_0 + m_1}{6} \eta'_1 (u - u_1)^3 + \dots, & \eta' = \eta'_1 - \frac{M(m_0 + m_1)}{6 q_1^3} \eta_1 (u - u_1)^3 + \dots, \\ \zeta = \zeta_1 + \frac{m_0 + m_1}{6} \zeta'_1 (u - u_1)^3 + \dots, & \zeta' = \zeta'_1 - \frac{M(m_0 + m_1)}{6 q_1^3} \zeta_1 (u - u_1)^3 + \dots, \\ \alpha = \alpha_1 + \dots, & \beta = \beta_1 + \dots, & \gamma = \gamma_1 + \dots, \\ x = \frac{m_0 + m_1}{2} \varphi (u - u_1)^2 + \dots, & x' = (m_0 + m_1) \varphi (u - u_1) + \dots, \\ y = \frac{m_0 + m_1}{2} \chi (u - u_1)^2 + \dots, & y' = (m_0 + m_1) \chi (u - u_1) + \dots, \\ z = \frac{m_0 + m_1}{2} \psi (u - u_1)^2 + \dots, & z' = (m_0 + m_1) \psi (u - u_1) + \dots, \\ r = \frac{m_0 + m_1}{2} (u - u_1)^2 + \dots, & r' = (m_0 + m_1) (u - u_1) + \dots, \end{array} \right.$$

$$(110) \quad t - t_1 = \frac{m_0 + m_1}{6} (u - u_1)^3 + \dots,$$

tous les coefficients ayant des valeurs *réelles*. Ces séries convergent tant que u vérifie l'inégalité (108).

De la dernière équation on peut tirer $u - u_1$ sous forme d'une série suivant les puissances entières et positives de $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$, et, en substituant cette série au lieu de $u - u_1$ dans les formules (109), on trouve que les quantités ξ, η, ζ, \dots sont aussi toutes développables suivant les puissances entières et positives de $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$, du moins tant que $|t - t_1|$ reste plus petit qu'une certaine quantité positive ε . Les quantités u, ξ, η, \dots , considérées comme fonctions de t , admettent donc $t = t_1$ comme un point singulier algébrique autour duquel se permutent circulairement trois branches de chacune de ces fonctions.

Par les séries ainsi obtenues nous pouvons, en particulier, calculer les valeurs des quantités r, x, y, \dots dans le mouvement considéré pour chaque valeur réelle de t comprise dans l'intervalle de $t_1 - \varepsilon$ à t_1 .

Mais ces mêmes séries nous permettront encore de définir une continuation du mouvement de nos corps après le choc. La seule continuation réelle s'obtient évidemment en choisissant la détermination réelle et positive de $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$. La valeur de cette expression étant réelle et négative pour les orbites primitives, on voit donc que, pour passer de celles-ci aux nouvelles orbites, il faudra faire décrire à la variable complexe t un chemin tournant autour du point t_1 de telle manière que l'argument de $t - t_1$ augmente ou diminue de 3π . D'ailleurs, si l'on prend pour variable u au lieu de t , les nouvelles orbites seront évidemment représentées par les développements (109) en y faisant $u - u_1 > 0$.

D'après le principe du prolongement analytique, les coordonnées des corps vérifieront encore pour $t > t_1$ les équations différentielles du mouvement et leurs intégrales premières, de sorte que la constante des forces vives et celles des aires garderont les valeurs qu'elles avaient avant le choc. De même, l'égalité (15) restera constamment vérifiée, et comme, d'après (109), la quantité r est positive après le choc, on voit qu'elle représentera toujours la distance $P_0 P_1$.

Il résulte des développements (109) que les rapports $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ tendent vers les mêmes limites φ, χ, ψ (qu'on peut supposer différentes de zéro, en orientant convenablement les axes des coordonnées) lorsque t tend vers t_1 , soit en croissant, soit en décroissant. On voit donc que les orbites des corps P_0 et P_1 présenteront chacune un point de rebroussement au point où ces corps viennent se choquer. Au contraire l'orbite du corps P_2 restera continue dans le voisinage de l'instant t_1 du choc. Les orbites que décrivent ainsi les corps après le choc se rattachent du reste d'une façon continue aux orbites qu'on obtient en faisant varier d'une façon continue les valeurs initiales des coordonnées et des composantes des vitesses de ces corps de façon à faire passer les corps tout près les uns des autres sans se heurter.

Il va sans dire que, lorsque nous parlons de la continuation du mouvement après un choc, nous supposons qu'il s'agisse de corps idéaux qui se réduisent à des points matériels, sans quoi, dans le voisinage de l'instant t_1 , d'autres forces que leur attraction mutuelle entreraient en jeu.

16. Puisque les coordonnées de nos points idéaux vérifient encore pour $t > t_1$ les équations (1)–(5), les résultats obtenus plus haut resteront vrais aussi pour le mouvement après le choc, qui, en particulier, ne cessera d'être régulier que lorsque survient un nouveau choc. Supposons que ceci ait lieu à l'instant t_2 ; nous nous proposons de chercher une limite inférieure de l'intervalle $t_2 - t_1$.

D'après le théorème démontré au n:o 14, les inégalités (94) auront lieu tant que $|u - u_1| < Q'_2$, et, comme les inégalités (84), (85) et (94) entraînent les inégalités (98) et (100), il s'ensuit que les distances r_0 et r_1 sont > 0 quand $|u - u_1| < Q'_2$. Si un choc a lieu après l'instant t_1 durant que $|u - u_1| < Q'_2$, ce sera par suite la distance r qui deviendra nulle.

Faisons croître u par des valeurs réelles à partir de la valeur u_1 ; il suit des deux premières des équations (79) que r et r' , partant tous les deux de la valeur 0, iront constamment en croissant, du moins tant que $m_0 + m_1 + rL > 0$. Mais, selon (103), on a $|L| < \lambda_1$ tant que les égalités (94) sont vérifiées, ce qui a lieu par exemple quand $u - u_1 \leq \frac{1}{2} Q'_2$. Pour les valeurs de r satisfaisant à l'inégalité

$$r \leq \frac{m_0 + m_1}{2\lambda_1} \dots \lambda_2,$$

nous aurons donc

$$\frac{3}{2}(m_0 + m_1) > m_0 + m_1 + rL > \frac{1}{2}(m_0 + m_1),$$

du moins tant que $u - u_1 \leq \frac{1}{2} Q'_2$. Des équations

$$\frac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + rL,$$

$$\frac{dr}{du} = r', \quad \frac{dt}{du} = r$$

on tire alors successivement les inégalités

$$\frac{3}{2}(m_0 + m_1)(u - u_1) > r' > \frac{1}{2}(m_0 + m_1)(u - u_1),$$

$$(III) \quad \frac{3}{4}(m_0 + m_1)(u - u_1)^2 > r > \frac{1}{4}(m_0 + m_1)(u - u_1)^2,$$

$$(II2) \quad t - t_1 > \frac{1}{12}(m_0 + m_1)(u - u_1)^3,$$

qui sont valables tant qu'on a simultanément

$$r \leq \lambda_2 \quad \text{et} \quad u - u_1 \leq \frac{1}{2} Q'_2.$$

On aura à distinguer deux cas, suivant que l'une ou l'autre de ces inégalités cesse la première d'être vérifiée quand u croît depuis u_1 .

Premier cas: $0 < r < \lambda_2$ quand $0 < u - u_1 \leq \frac{1}{2} Q'_2$. L'intervalle $t_2 - t_1$ étant certainement plus grand que l'accroissement de t lorsque u croît de u_1 à $u_1 + \frac{1}{2} Q'_2$ on conclut de l'inégalité (112) que

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{96} (m_0 + m_1) Q'_2{}^3.$$

Second cas: $r = \lambda_2$ pour $u - u_1 = \sigma \left(\leq \frac{1}{2} Q'_2 \right)$, tandis que $0 < r < \lambda_2$ pour $0 < u - u_1 < \sigma$.

En mettant $r = \lambda_2$ et $u - u_1 = \sigma$ dans l'inégalité (111), on trouve

$$\sigma^2 > \frac{4 \lambda_2}{3 (m_0 + m_1)}$$

ou, en substituant à λ_2 sa valeur,

$$\sigma^2 > \frac{2}{3 \lambda_1}.$$

La valeur de t pour $u = u_1 + \sigma$ satisfera par conséquent, d'après (112), à l'inégalité

$$t - t_1 > \frac{m_0 + m_1}{18 \lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3 \lambda_1}},$$

qui sera à plus forte raison vérifiée pour $t = t_2$.

En résumé nous pouvons affirmer que *l'intervalle de temps entre les deux chocs considérés est supérieur à la plus petite des quantités*

$$(113) \quad \frac{m_0 + m_1}{96} Q'_2{}^3 \quad \text{et} \quad \frac{m_0 + m_1}{18 \lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3 \lambda_1}}.$$

On aurait des résultats analogues si c'était la distance r_0 ou la distance r_1 qui s'annule quand t tend vers t_1 .

17. Lorsqu'on fait croître t au delà de la valeur t_1 , le mouvement que nous venons de définir au n:o 15 ou restera constamment régulier, ou bien cessera d'être régulier lorsque t tend vers une certaine valeur finie t_2 . Comme au n:o 7 on démontre que, dans ce dernier cas, ou les trois corps se choquent tous en un

même point de l'espace à l'instant t_2 , ou bien deux des corps se choquent tandis que leurs distances au troisième tendent vers une limite supérieure à zéro. Si l'on suppose que la quantité R tend vers une valeur *positive* R_2 quand t tend vers t_2 , c'est ce dernier cas qui aura lieu, et, en procédant comme aux nos 11—15, on pourra alors définir une continuation réelle du mouvement des trois corps idéaux au delà de l'instant t_2 qui constitue un vrai prolongement analytique de celui que nous avons défini pour $t_1 < t < t_2$, et par suite aussi du mouvement primitif.

On pourra ainsi continuer le mouvement après chaque nouveau choc, à condition que la quantité R ne s'annule pas.

Dès lors, deux cas sont a priori possibles: ou bien le procédé décrit ci-dessus permet de définir de proche en proche le mouvement *pour toutes les valeurs de t* ; ou bien les valeurs t pour lesquelles on peut définir le mouvement par notre procédé admettent *une limite supérieure finie t* . Nous allons chercher la condition pour que cette dernière circonstance puisse se présenter.

Il est d'abord clair que nous ne pouvons pas continuer le mouvement après un instant t auquel les trois corps se choquent tous en un même point. Dans ce cas, on a

$$(114) \quad \lim_{t=t} R = 0,$$

et il résulte du raisonnement des nos 6 et 7 qu'il existe une quantité positive δ telle que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ est constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à \bar{t} .

Mais la circonstance en question pourrait se réaliser encore d'une autre manière. Supposons, en effet, qu'il se produise une infinité de chocs successifs deux à deux entre les trois corps, et que les valeurs correspondantes

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_r, \dots$$

de la variable t tendent vers la limite finie t :

$$(115) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} t_r = t.$$

Il est évident que notre procédé de continuation ne nous permet pas de dépasser l'instant t . Nous allons voir que l'égalité (114) a lieu aussi dans ce cas, et qu'elle constitue ainsi la condition cherchée.

18. Supposons donc qu'on ait l'égalité (115), t étant fini. Le mouvement cesse nécessairement d'être régulier pour $t = \bar{t}$. Il s'ensuit d'abord que *la plus petite des distances* r_0, r_1, r_2 *tend vers zéro quand* t *tend vers* \bar{t} , ce qu'on démontre par un raisonnement identique à celui du n:o 6. Comme dans ce numéro, on en conclut successivement que $U - K > 0$, que la dérivée $\frac{d^2 R^2}{dt^2}$ est positive et, par suite, la dérivée $\frac{dR^2}{dt}$ croissante dans un certain intervalle $\bar{t} - \delta_0 < t < \bar{t}$, d'où il suit encore que la quantité R^2 variera constamment dans le même sens pour $\bar{t} - \delta < t < \bar{t}$, si δ est suffisamment petit, et qu'elle tendra par conséquent vers une limite déterminée, positive ou nulle, lorsque t tend vers \bar{t} .¹

Si nous démontrons que cette limite de R ne peut être positive, nous aurons établi que l'hypothèse (115) entraîne comme conséquence l'égalité (114), et, en même temps, que $\frac{dR}{dt}$ est négative dans l'intervalle de $t - \delta$ à t .

Admettons un moment qu'on ait

$$\lim_{t=\bar{t}} R > 0.$$

En raisonnant mot à mot comme au n:o 7 (à cela près qu'on remplace t_1 par \bar{t}), on démontre *qu'une seule et même distance tend vers zéro quand* t *tend vers* \bar{t} , *tandis que les deux autres tendent vers la même limite positive.*

Admettons encore, pour fixer les notations, que ce soit la distance $r = r_2$ qui tend vers zéro, de sorte qu'on aura

$$(116) \quad \lim_{t=\bar{t}} r = 0$$

et

$$(117) \quad \lim_{t=\bar{t}} r_0 = \lim_{t=\bar{t}} r_1 = \lim_{t=\bar{t}} \varrho > k,$$

k désignant une constante positive. Il s'ensuit qu'il existe une quantité positive

¹ Il faut observer que, dans le mouvement de nos corps idéaux que nous avons défini pour $t < \bar{t}$, les coordonnées de ces corps, et par suite aussi leurs distances et la quantité R sont des fonctions continues de t . De plus la dérivée $\frac{dR^2}{dt} = 2gr \frac{dr}{dt} + 2h\rho \frac{d\rho}{dt}$ reste continue aussi au voisinage d'un choc. Le fait que la dérivée seconde $\frac{d^2 R^2}{dt^2}$ devient infinie aux instants de choc n'a alors aucune influence sur le raisonnement du texte.

b telle que les inégalités (50) ont lieu tant que t reste dans un certain intervalle $\bar{t} - \delta \leq t < \bar{t}$. Comme au n:o 8, on en conclut que

$$\left| \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right| \text{ et } \left| \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right| < \frac{M}{b^2}$$

dans cet intervalle, et que $\xi', \eta', \zeta', \xi, \eta, \zeta, \varrho'$ et ϱ tendent vers des limites *finies* et *déterminées* quand t tend vers \bar{t} . La vitesse

$$V = V_{\xi'^2} + \eta'^2 + \zeta'^2$$

tendant donc aussi vers une limite finie et déterminée quand t tend vers \bar{t} , on pourra trouver une constante V telle qu'on ait

$$V < \bar{V} \text{ pour } \bar{t} - \delta' \leq t < \bar{t},$$

δ' désignant une constante positive convenablement choisie.

D'autre part, d'après les relations (116) et (117), on peut trouver une quantité positive α_1 telle que

$$r < \frac{\alpha_1}{2} \text{ et } \varrho \geq 14 \alpha_1$$

tant que t vérifie l'inégalité

$$\bar{t} - \delta'' \leq t < \bar{t},$$

δ'' désignant une constante positive. Soit $\bar{\delta}$ la plus petite des quantités δ' et δ'' et désignons pour un moment par t_1 l'instant d'un choc quelconque qui a lieu entre $t - \bar{\delta}$ et t . En adoptant les notations des n:os 13 et suivants, il est dès lors évident que les inégalités (84) et (85) seront vérifiées et que la quantité V_1 [voir la formule (105)] satisfera à l'inégalité

$$V_1 < V.$$

En écrivant dans les expressions (104) et (107) V au lieu de V_1 , on obtiendra une valeur λ_1 de λ_1 et une valeur Q'_2 de Q'_2 qui satisfont aux inégalités

$$\lambda_1 > \lambda_1, \quad Q'_2 < Q'_2,$$

d'où suivent encore les inégalités

$$\frac{m_0 + m_1}{96} Q_2'^3 > \frac{m_0 + m_1}{96} \bar{Q}_2'^3, \quad \frac{m_0 + m_1}{18 \lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3 \lambda_1}} > \frac{m_0 + m_1}{18 \lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3 \bar{\lambda}_1}}.$$

Or les résultats du n:o 16 s'appliquent également à l'intervalle compris entre l'instant t_1 considéré ci-dessus et l'instant du premier choc qui a lieu après t_1 . Cet intervalle est par suite plus grand que la plus petite des quantités (113). En désignant par j la plus petite des quantités

$$\frac{m_0 + m_1}{96} \bar{Q}_2'^3 \text{ et } \frac{m_0 + m_1}{18 \lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3 \bar{\lambda}_1}},$$

nous pouvons donc conclure des dernières inégalités ci-dessus que l'intervalle de temps entre deux chocs successifs quelconques qui ont lieu dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à \bar{t} est supérieur à j , de sorte que le nombre de ces chocs sera nécessairement plus petit que le quotient $\frac{\delta}{j}$. Or cette conclusion est en contradiction avec la supposition (115). Donc l'hypothèse

$$\lim_{t=t} R > 0$$

doit être rejetée, d'où cette conclusion:

Si l'égalité (115) a lieu, la condition (114) est nécessairement aussi vérifiée.

En résumant nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Le procédé décrit aux n:os 15 et 17 permet de continuer le mouvement jusqu'à ce qu'on trouve une valeur \bar{t} telle que

$$\lim_{t=\bar{t}} R = 0.$$

De plus, s'il existe une telle valeur \bar{t} , on peut déterminer la quantité positive δ de manière que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ soit constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à \bar{t} .

Nous verrons dans la suite qu'un tel instant \bar{t} ne saurait exister que dans le cas particulier où les constantes des aires sont nulles toutes les trois.

VIII.

Non-existence d'un instant fini \bar{t} tel que $\lim_{t=\bar{t}} R = 0$ dans le cas où les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois.

19. Dès maintenant nous écarterons constamment de nos considérations le cas particulier des trois corps où les constantes des aires sont nulles toutes les trois. Nous supposons donc que la quantité

$$(118) \quad f = \frac{M}{m_0 m_1 m_2} \sqrt{c_0^2 + c_1^2 + c_2^2}$$

vérifie l'inégalité

$$(119) \quad f > 0.$$

Cela posé, nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Lemme: Soient R' (> 0), H' et R'' (> 0), H'' les valeurs que prennent les fonctions R et

$$(120) \quad H = R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + KR + \frac{f^2}{R}$$

pour $t = t'$ et $t = t''$. Si la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe dans l'intervalle de t' à t'' , on aura

$$H'' \geq H' \quad \text{ou} \quad H'' \leq H'$$

suivant que

$$R'' > R' \quad \text{ou} \quad R'' < R'.$$

D'après l'expression (33), la quantité P est supérieure ou égale à la somme des trois expressions

$$\frac{g}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{h}{q^2} (\xi \eta' - \eta \xi')^2,$$

$$\frac{g}{r^2} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{h}{q^2} (\eta \zeta' - \zeta \eta')^2,$$

$$\frac{g}{r^2} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{h}{q^2} (\zeta \xi' - \xi \zeta')^2.$$

Mais, à l'aide de la première des équations (18), on trouve, après quelques réductions,

$$\frac{g}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\xi \eta' - \eta \xi')^2 = \frac{h R^2}{g r^2 \varrho^2} \left(\xi \eta' - \eta \xi' - \frac{g h \varrho^2}{R^2} c_0 \right)^2 + \frac{g^2 h^2}{R^2} c_0^2,$$

d'où

$$\frac{g}{r^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\xi \eta' - \eta \xi')^2 \geq \left(\frac{g h c_0}{R} \right)^2 = \left(\frac{M c_0}{m_0 m_1 m_2 R} \right)^2,$$

et, en faisant usage des deux autres équations (18), on trouve de même

$$\frac{g}{r^2} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\eta \zeta' - \zeta \eta')^2 \geq \left(\frac{M c_1}{m_0 m_1 m_2 R} \right)^2,$$

$$\frac{g}{r^2} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{h}{\varrho^2} (\zeta \xi' - \xi \zeta')^2 \geq \left(\frac{M c_2}{m_0 m_1 m_2 R} \right)^2,$$

de sorte que la somme des trois expressions en question est elle-même supérieure ou égale à

$$\left(\frac{M}{m_0 m_1 m_2 R} \right)^2 (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) = \frac{f^2}{R^2},$$

d'où résulte enfin qu'on peut écrire

$$(121) \quad P = \frac{f^2}{R^2} + F,$$

la fonction F vérifiant l'inégalité

$$(122) \quad F \geq 0.$$

En substituant cette valeur de P dans l'équation (34), on obtient l'égalité

$$2 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + K - \frac{f^2}{R^2} = F,$$

qui, multipliée par $\frac{dR}{dt} dt$ et intégrée entre les limites t' et t'' , nous donne

$$H'' - H' = \int_{t'}^{t''} F \frac{dR}{dt} dt,$$

ou encore, puisque par hypothèse la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe dans l'intervalle de t' à t'' ,

$$H'' - H' = \int_{t'}^{t''} F dR,$$

d'où résulte immédiatement notre lemme.

20. Supposons maintenant que R tend vers zéro quand t tend vers la valeur finie \bar{t} . D'après le théorème énoncé à la fin du n:o 18, il existe alors une quantité positive δ telle que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ soit constamment négative dans l'intervalle de $\bar{t} - \delta$ à \bar{t} .

Soit t' un instant entre $\bar{t} - \delta$ et \bar{t} auquel le mouvement est régulier. Comme à cet instant R et $\frac{dR}{dt}$ sont finis et $R > 0$, il suit de l'égalité (120) que la fonction H admet également une valeur finie H' pour $t = t'$.

Soit encore t'' une valeur quelconque de t comprise entre t' et \bar{t} et R'' la valeur correspondante de R . La dérivée $\frac{dR}{dt}$ étant négative dans l'intervalle de t' à t'' , on aura

$$R'' < R',$$

et par suite, d'après le lemme du n:o 19,

$$H'' < H'.$$

Puisque, d'après (120),

$$\frac{f^2}{R''} + K R'' \leq H'',$$

on en conclut que l'inégalité

$$\frac{f^2}{R''} + K R'' < H'$$

subsiste pour toute valeur t'' comprise entre t' et \bar{t} .

Cela posé, en faisant tendre t'' vers t , la quantité R'' tendra vers zéro, d'après notre hypothèse, et le premier membre de l'inégalité ci-dessus tendra

done vers l'infini, puisque $f^2 > 0$. Comme H' est fini, cette inégalité implique donc une contradiction dès que la valeur t'' est suffisamment rapprochée de t . Donc l'hypothèse admise au début de ce numéro doit être rejetée, ce qui donne le théorème suivant:

Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, la quantité R ne saurait tendre vers zéro lorsque t tend vers une valeur finie t .

En vertu du théorème obtenu au n:o 18, il s'ensuit que, *si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, la méthode dont nous nous sommes servi plus haut pour continuer le mouvement de nos corps idéaux après un choc ne sera jamais en défaut, et nous permettra donc de définir leur mouvement pour des valeurs de t aussi grandes qu'on voudra.*

D'après ce que nous avons dit au commencement du n:o 6, on voit immédiatement que tous les résultats que nous avons obtenus en faisant croître t depuis $t=0$ sont encore valables si l'on fait décroître t depuis $t=0$ vers $-\infty$. En particulier, nous pouvons continuer le mouvement avant des chocs éventuels, de sorte que le mouvement des corps sera bien déterminé aussi pour les valeurs de temps comprise entre 0 et $-\infty$.

IX.

Détermination d'une limite inférieure de R dans le cas où les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois.

21. Soit maintenant t' une valeur quelconque réelle et finie de t . Comme nous supposons que les constantes des aires ne sont pas toutes nulles, il résulte de ce qui précède que R admet nécessairement pour $t=t'$ une valeur R' qui est finie et plus grande que zéro, et que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ admet de même une valeur finie $\frac{dR'}{dt}$ pour $t=t'$, qu'un choc se produise ou non à l'instant t' . La fonction H admet donc aussi pour $t=t'$ une valeur finie H' .

Cela posé, cherchons comment se comporte la quantité R dans le voisinage de l'instant t' .

Si R n'a pas un minimum pour $t=t'$, on trouvera certainement, avant ou après t' , un instant t'' tel que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ conserve le même signe et que R soit inférieur à R' dans l'intervalle de t' à t'' . D'après le lemme du n:o 19, on aura alors

$$H'' \leq H'$$

ou

$$R \left(\frac{dR'}{dt} \right)^2 + K R'' + \frac{f^2}{R''} \leq H',$$

d'où suit

$$\frac{f^2}{R''} \leq H' - K R'' = H' + |K| R'$$

ou bien

$$(123) \quad R'' \geq \frac{f^2}{H' + |K| R'}.$$

Faisons varier t'' de manière que la valeur absolue de $t'' - t'$ augmente. L'inégalité (123) restera valable jusqu'à ce que t'' passe par une valeur, soit t , où $\frac{dR}{dt}$ change de signe. R admet alors un minimum pour $t = \bar{t}$ et augmentera lorsque $|t'' - t'|$ continue à croître. L'inégalité (123) sera par suite vraie aussi pour $|t'' - t'| > |\bar{t} - t'|$ tant que R croît avec $|t'' - t'|$, c'est à dire du moins jusqu'au moment où R passe par un maximum.

Si R' est précisément une valeur minima de R , de sorte que $\frac{dR'}{dt} = 0$, l'égalité

$$H' = R' \left(\frac{dR'}{dt} \right)^2 + K R' + \frac{f^2}{R'}$$

nous donne

$$R' \geq \frac{f^2}{H' + |K| R'}.$$

On aura donc encore l'inégalité (123), du moins jusqu'au moment où R passe par un maximum. On est ainsi conduit à ce

Théorème: *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on a*

$$(124) \quad R \geq \frac{f^2}{H' + |K| R'}$$

dans chaque intervalle de temps qui comprend t' et où R n'admet pas de maximum, sauf peut-être pour $t = t'$.

Si $K \leq 0$, l'équation (23) montre que la dérivée $\frac{d^2 R}{dt^2}$ n'est jamais négative, d'où l'on conclut que R n'a pas de maximum. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, R tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et notre théorème donne par suite une limite inférieure de R qui reste valable pour tous les temps. Il en est de même lorsque $K > 0$, pourvu que R ne présente pas de maximum pour les valeurs finies de t . Pour déterminer la limite en question, nous pouvons faire par exemple $t' = 0$, et notre résultat peut alors se résumer comme il suit:

Théorème: En désignant par R^0 et $\frac{dR^0}{dt}$ les valeurs de R et $\frac{dR}{dt}$ pour $t = 0$, on aura toujours

$$R \geq \frac{f^2 R^0}{\left(R^0 \frac{dR^0}{dt}\right)^2 + f^2}$$

si $K \leq 0$, et

$$R \geq \frac{f^2 R^0}{\left(R^0 \frac{dR^0}{dt}\right)^2 + 2K R^0 + f^2}$$

si $K > 0$ et si R ne présente pas de maximum pour des valeurs finies de t .

Nous ferons voir dans les numéros suivants que, dans le cas où $K > 0$ et où R admet du moins un maximum pour une valeur finie du temps, on peut encore trouver une limite inférieure de R valable pour tous les temps et qui ne dépend que de f et K .

22. Considérons donc le cas où

$$(125) \quad K > 0$$

et admettons que R passe par un maximum R' pour $t = t'$, de sorte qu'on aura

$$(126) \quad \frac{dR'}{dt} = 0$$

et par suite

$$H' = K R' + \frac{f^2}{R'}$$

Comme R' est un maximum, il existe certainement dans le voisinage de t' un instant t'' tel que la dérivée $\frac{dR}{dt}$ ne change pas de signe et que $R < R'$ dans l'intervalle de t' à t'' . D'après le lemme du n:o 19 on aura alors

$$R'' \left(\frac{dR''}{dt} \right)^2 + K R'' + \frac{f^2}{R''} \leq K R' + \frac{f^2}{R'},$$

d'où il suit successivement

$$K(R' - R'') \geq f^2 \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R'} \right),$$

$$K \leq \frac{f^2}{R' R''}, \quad K R'^2 \leq f^2,$$

et enfin

$$\frac{f^2}{R'} < f \sqrt{K}.$$

On aura donc

$$H' < f \sqrt{K} + K R',$$

et, en faisant usage du premier théorème du numéro précédent, on en conclut que *l'inégalité*

$$(127) \quad R > \frac{f^2}{f \sqrt{K} + 2 K R'}$$

a lieu depuis le maximum de R qui précède immédiatement le maximum R' jusqu'au premier maximum qui le suit.

Cette limite inférieure de R deviendrait de plus en plus petite si, t tendant vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, on rencontrait des maxima R' de plus en plus grands. Nous verrons cependant qu'on peut trouver une limite positive *fixe* qui reste valable quelque grand que soit le maximum considéré R' .

23. Remarquons d'abord que, en vertu de l'égalité (19), on a toujours

$$2U - K \geq 0$$

ou bien

$$\frac{1}{m_0 r_0} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2} \leq \frac{K}{2M},$$

d'où l'on tire, en désignant comme plus haut par r_m la plus petite des distances r_i ,

$$\frac{1}{r_m} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \geq \frac{K}{2M}$$

ou encore

$$r_m \leq q,$$

en posant

$$(128) \quad q = \frac{2M}{K} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

En général, le mouvement se passe de telle sorte que tantôt l'une tantôt l'autre des trois distances r_i est la plus petite. Mais, puisque les r_i sont des fonctions continues du temps, il est évident que chaque fois qu'une certaine distance cesse d'être la plus petite, elle deviendra égale à une autre distance, de sorte qu'elles seront toutes les deux $\leq q$. La troisième distance étant alors $\leq 2q$, on voit donc que, au moment considéré, toutes les distances sont $< q\sqrt{5}$ (limite trop élevée mais choisie de manière à simplifier les formules), et que par suite

$$R < R_0,$$

où R_0 désigne la racine positive de l'équation

$$(129) \quad R_0^3 = 5q^3 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Nous pouvons en conclure que, *dans un intervalle de temps où $R \geq R_0$, une seule et même distance reste constamment $< q$.*

24. Considérons le mouvement pendant un intervalle de temps où l'inégalité

$$(130) \quad R \geq R_0$$

est constamment vérifiée, et admettons, ce qui ne restreint pas la généralité, que ce soit la distance r_2 qui, dans cet intervalle, reste inférieure à q . En employant les coordonnées et les notations des nos 2 et 3, nous aurons alors

$$(131) \quad r < q.$$

Avant d'aller plus loin nous voulons déduire de (130) et (131) quelques autres inégalités dont nous aurons besoin, et fixer une certaine valeur R_0 de la quantité R qui jouera un rôle important dans la suite.

A cet effet, nous déterminerons d'abord une constante positive σ par la condition

$$(129 \text{ bis}) \quad R_0^2 = (g + \sigma^2 h) q^2,$$

g et h étant définis par les égalités (10). En rapprochant cette égalité de l'égalité (129), on trouve pour σ^2 l'expression

$$(132) \quad \sigma^2 = 4 + \frac{4 m_0 m_1}{m_2 (m_0 + m_1)^2} \frac{m_0^2 + m_0 m_1 + m_1^2}{(m_0 + m_1)^2},$$

d'où

$$(133) \quad \sigma > 2.$$

Nous aurons alors, d'après les formules (21 bis), (130), (129 bis) et (131),

$$(134) \quad q > \sigma q,$$

d'où il suit, selon (131),

$$(135) \quad r < \frac{\sigma}{\sigma^2},$$

et, comme $r_0 < q < r$, $r_1 < q < r$, on en conclut pour r_0 et r_1 les inégalités

$$(136) \quad \begin{cases} r_0 < \frac{\sigma - 1}{\sigma} q < (\sigma - 1) q, \\ r_1 < \frac{\sigma - 1}{\sigma} q < (\sigma - 1) q. \end{cases}$$

De même, l'équation (21 bis), qui peut s'écrire

$$h q^2 = R^2 - g r^2,$$

nous donne pour q l'inégalité

$$(137) \quad q \leq \frac{R}{Vh}$$

et d'autre part, en remarquant qu'on a, d'après (129 bis), (130) et (131),

$$g r^2 < g q^2 = \frac{g R_0^2}{g + \sigma^2 h} < \frac{g R^2}{g + \sigma^2 h},$$

l'inégalité

$$(138) \quad q > e \frac{R}{Vh},$$

où la constante

$$(139) \quad e = \sqrt{\frac{\sigma^2 h}{g + \sigma^2 h}}$$

est plus petite que 1.

Cela posé, nous allons définir la constante R_0 par l'égalité

$$(140) \quad R_0 = \frac{R_0}{e},$$

d'où il résulte que $R_0 > R_0$.

En désignant par \bar{q}_0 , q_0 les valeurs de q correspondant respectivement aux valeurs R_0 et R_0 de R , on aura alors, d'après (137) et (138),

$$q_0 = \frac{R_0}{1/h}, \quad q_0 > e \frac{R_0}{1/h},$$

et par suite $q_0 > q_0$. On en conclut que *tout intervalle de temps dans lequel R décroît de R_0 à R_0 , renferme un instant t où l'inégalité*

$$\frac{dq}{dt} < 0$$

est vérifiée.

R , \bar{q} , ... désignant les valeurs que prennent R , q , ... pour un tel instant t , on aura dès lors, d'après les inégalités démontrées ci-dessus,

$$(141) \quad \frac{dq}{dt} < 0,$$

$$(142) \quad R_0 < R \leq R_0,$$

$$(143) \quad e^2 \frac{R_0}{Vh} < \bar{q} \leq \frac{\bar{R}_0}{Vh}.$$

25. Les équations différentielles du mouvement restant invariables lorsqu'on change t en $-t$ ainsi que le signe de toutes les dérivées premières, on voit aisément que les limites inférieures indépendantes de t qu'on trouve pour R après un maximum seront aussi valables avant ce même maximum.

Étudions donc les valeurs de R après un moment t' où R passe par un maximum R' . Pour la démonstration il nous sera nécessaire de diviser les maxima en trois classes, suivant la grandeur du maximum R' et celle du minimum R'' qui le suit immédiatement.

A la première classe nous rapporterons les maxima qui vérifient la condition

$$R' < R_0.$$

D'après le résultat du n:o 22, on aura

$$R > \frac{f^2}{fVK + 2KR_0}$$

depuis l'instant t' où R passe par un tel maximum jusqu'au premier maximum qui le suit.

La seconde classe comprendra les maxima pour lesquels

$$R' > R_0 \text{ et } R'' \geq R_0.$$

D'après la définition même, on aura dans ce cas

$$R > R_0$$

depuis l'instant t' jusqu'au premier maximum de R qui se présente après t' .

Enfin, les maxima de la troisième classe satisfont aux inégalités

$$R' > R_0 \text{ et } R'' < R_0.$$

Ils seront étudiés de plus près dans la suite.

26. Considérons donc un maximum de cette troisième classe. R diminuera constamment de $R' (> R_0)$ jusqu'à une valeur de R inférieure à R_0 . Nous supposerons de plus que c'est la distance r_2 qui est petite quand $R > R_0$. D'après ce que nous avons trouvé à la fin du n:o 24, il existe alors un moment $t (> t')$ où ont lieu les inégalités (141), (142) et (143).

Pour trouver une limite inférieure de R , nous allons chercher une limite supérieure de la fonction H pour $t = t$. Pour cela il nous faut connaître une telle limite pour la valeur absolue de la dérivée $\frac{dR}{dt}$, ou bien, puisque

$$(144) \quad R \frac{dR}{dt} = g r \frac{dr}{dt} + h \varrho \frac{d\varrho}{dt}.$$

des limites supérieures pour les expressions $\left| r \frac{dr}{dt} \right|$ et $\left| \varrho \frac{d\varrho}{dt} \right|$.

Vu les inégalités

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \geq \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

et

$$(145) \quad \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \geq \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2,$$

on tire de (19) l'inégalité

$$(146) \quad g \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + h \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 \leq 2U - K.$$

Mais on a pour $R \geq R_0$, en vertu des inégalités (133) et (136),

$$\frac{2M}{m_0 r_0} + \frac{2M}{m_1 r_1} < \frac{2M}{(\sigma-1)q} \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right) = \frac{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \frac{K}{\sigma-1} < K,$$

et par suite, selon la définition de U ,

$$2U - K < \frac{2M}{m_2 r},$$

de sorte que l'inégalité (146) peut s'écrire

$$g \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + h \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 < \frac{2M}{m_2 r}.$$

On en tire

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 < \frac{2M}{g m_2 r},$$

et par suite

$$\left| r \frac{dr}{dt} \right| < \sqrt{\frac{2M}{g m_2}} r,$$

et enfin

$$(147) \quad \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| < \sqrt{\frac{2M\bar{q}}{g m_2}}.$$

27. Il nous reste à chercher une limite supérieure de $\left| \frac{d\bar{q}}{dt} \right|$. A cet effet différencions l'équation (22) deux fois par rapport à t , ce qui nous donne

$$\bar{q} \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} + \left(\frac{d\bar{q}}{dt} \right)^2 = \xi \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2,$$

et par suite, d'après (145),

$$\bar{q} \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} \geq \xi \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

ou encore, au moyen de (17),

$$(148) \quad \bar{q} \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} \geq -M \left(\frac{\lambda}{r_0^2} \frac{\bar{q}^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)}{r_0} + \frac{\mu}{r_1^2} \bar{q}^2 + \frac{\lambda}{r_1} (x\xi + y\eta + z\zeta) \right).$$

Mais on a, d'après (13),

$$r_0^2 = \bar{q}^2 + \mu^2 r^2 - 2\mu(x\xi + y\eta + z\zeta),$$

d'où suit

$$\bar{q}^2 r_0^2 = [\bar{q}^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)]^2 + \mu^2 [r^2 \bar{q}^2 - (x\xi + y\eta + z\zeta)^2],$$

ou encore, puisque $|x\xi + y\eta + z\zeta| \leq r\bar{q}$,

$$\bar{q} r_0 \geq |\bar{q}^2 - \mu(x\xi + y\eta + z\zeta)|.$$

De l'équation (14) on tire d'une manière analogue

$$\bar{q} r_1 \geq |\bar{q}^2 + \lambda(x\xi + y\eta + z\zeta)|.$$

En vertu des deux dernières inégalités, on conclut de (148)

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} \geq -M \left(\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\mu}{r_1^2} \right).$$

ou encore, selon (136),

$$(149) \quad \frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{C}{\varrho^2} \geq 0,$$

avec

$$(150) \quad C = \frac{M \sigma^2}{(\sigma - 1)^2}.$$

Pour aller plus loin nous devons considérer séparément:

1) le cas où $\frac{d\varrho}{dt} < 0$ durant que t croît de t' à \bar{t} ;

2) le cas où il existe un instant t''' entre t' et \bar{t} , tel qu'on ait $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ pour $t = t'''$ et $\frac{d\varrho}{dt} < 0$ entre t''' et \bar{t} .

Dans le premier cas nous aurons, d'après (149), pour les valeurs t comprises entre t' et t

$$(151) \quad 2 \frac{d\varrho}{dt} \left(\frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{C}{\varrho^2} \right) \geq 0,$$

d'où il suit, en intégrant entre les limites t' et t ,¹

$$\left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 \leq \left(\frac{d\varrho'}{dt} \right)^2 + \frac{2C}{\varrho} - \frac{2C}{\varrho'},$$

ou encore

$$(152) \quad \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 \leq \left(\frac{d\varrho'}{dt} \right)^2 + \frac{2C}{\varrho}.$$

Dans le second cas l'inégalité (151) a lieu de t''' à t ; en intégrant entre ces limites, on trouve $\left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2$ étant nul pour $t = t'''$

$$\left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 \leq \frac{2C}{\varrho} - \frac{2C}{\varrho'''},$$

d'où l'on voit que l'inégalité (152) est vraie aussi dans ce second cas.

¹ Dans ce numéro nous désignerons exceptionnellement par r' , $\frac{dr'}{dt}$, ρ' et $\frac{d\rho'}{dt}$ les valeurs de r , $\frac{dr}{dt}$, ρ et $\frac{d\rho}{dt}$ pour $t = t'$.

Calculons maintenant une limite supérieure de $\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2$; R étant par hypothèse maximum pour $t=t'$, on doit avoir $\frac{d^2 R^2}{dt^2} \leq 0$ pour $t=t'$, ou bien, d'après (23),

$$U' \leq K,$$

U' désignant la valeur de U pour $t=t'$. L'inégalité (146) nous donne par conséquent

$$g \left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + h \left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 \leq K.$$

Puisque nous avons $\frac{dR'}{dt} = 0$, on trouve d'autre part, en différentiant l'équation (21 bis),

$$g r' \frac{dr'}{dt} + h \varrho' \frac{d\varrho'}{dt} = 0.$$

De ces deux relations on tire

$$\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 \leq \frac{K g r'^2}{h R'^2},$$

ou encore, d'après (131) et (143),

$$\left(\frac{d\varrho'}{dt}\right)^2 \leq \frac{K g q^2}{h R^2} = \frac{K g q^2}{h^2 \varrho^2}.$$

En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (152), on trouve

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 < \frac{2C}{\varrho} + \frac{K g q^2}{h^2 \varrho^2},$$

d'où il suit

$$\left|\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right| < \sqrt{K g q^2} + 2C \varrho,$$

et enfin, d'après (143),

$$(15) \quad \left|\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right| < \sqrt{K g q^2} + \frac{2C R_0}{\sqrt{h}}.$$

28. En vertu des inégalités (147) et (153), l'équation (144) nous donne

$$\left| R \frac{dR}{dt} \right| < \sqrt{\frac{2Mgq}{m_2}} + \sqrt{K g q^2 + 2C R_0 h V h},$$

d'où il suit

$$R^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 < \frac{4Mgq}{m_2} + 2K g q^2 + 4C R_0 h V h,$$

ou encore, d'après (142),

$$\bar{R} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 < \frac{1}{R_0} \left(\frac{4Mgq}{m_2} + 2K g q^2 + 4C R_0 h V h \right).$$

En remontant maintenant à l'expression (120) de la fonction H , on en conclut, d'après (142), que

$$H + KR < S_2,$$

où

$$S_2 = \frac{1}{R_0} \left(\frac{4Mgq}{m_2} + f^2 + 2K g q^2 + 4C R_0 h V h \right) + 2K R_0,$$

et, en faisant usage du théorème établi au n:o 21, nous arrivons donc à ce résultat que l'inégalité

$$R > \frac{f^2}{S_2}$$

a lieu depuis t' jusqu'au moment où R passe de nouveau par un maximum.

On voit immédiatement que $R_0 > \frac{f^2}{S_2}$. En tenant compte des limites de R indiquées au n:o 25 pour les cas où le maximum considéré R' appartient à la première ou à la deuxième classe, on trouve donc que l'inégalité

$$R > \frac{f^2}{S_2 + f\sqrt{K}}$$

subsiste depuis la valeur t' jusqu'au premier maximum après t' , et cela quelle que soit la classe du maximum considéré R' .

Pour plus de commodité, nous substituerons à cette limite de R une autre où les masses m_0, m_1, m_2 figurent d'une manière symétrique. Désignons comme

plus haut par m la plus petite de ces masses. En ayant égard aux définitions des diverses quantités, on trouve successivement les inégalités suivantes

$$M > m_2 \geq m, \quad m \leq \frac{M}{3}, \quad m_0 + m_1 \geq 2m,$$

$$g = \frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2} \leq \frac{3}{2m}, \quad h = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \leq \frac{2}{m},$$

$$\frac{9}{M} \leq \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leq \frac{3}{m},$$

$$\frac{18}{K} \leq q \leq \frac{6M}{Km}, \quad 3\sqrt{\frac{5}{M}} \leq \frac{R_0}{q} \leq \sqrt{\frac{15}{m}},$$

$$\frac{1}{R_0} \leq \frac{K}{54} \sqrt{\frac{M}{5}}, \quad R_0 \leq \frac{6M}{Km} \sqrt{\frac{15}{m}},$$

$$\frac{\bar{R}_0}{R_0} = \sqrt{\frac{g + \sigma^2 h}{\sigma^2 h}} = \sqrt{\frac{5\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}{4\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{m_0^2 + m_0 m_1 + m_1^2}{m_0 m_1 (m_0 + m_1)}}} < \sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$R_0 < \frac{15M}{Km} \sqrt{\frac{3}{m}}, \quad C < 4M,$$

d'où on tire aisément

$$S_2 < \left(\frac{8M}{m^2} + \frac{f^2 K}{54} \right) \sqrt{\frac{M}{5}} + 2(8\sqrt{10} + 15\sqrt{3}) \frac{M}{m\sqrt{m}},$$

et par suite

$$\frac{f^2}{S_2 + fVK} > \frac{m^2 f^2}{\left(8M + \frac{f^2 K m^2}{54} \right) \sqrt{\frac{M}{5}} + 2(8\sqrt{10} + 15\sqrt{3}) M \sqrt{m} + fVK m^2}$$

ou encore, en remplaçant au dénominateur m par $\frac{M}{3}$ et en simplifiant les coefficients numériques,

$$S_2 + fVK < \frac{f^2}{64} + \frac{f^2}{2fVKM} + \frac{m^2}{1024} \frac{f^2 KM}{M^2}.$$

En posant enfin

$$(154) \quad S = \left(\frac{f m}{8 + \frac{1}{32} f V K M} \right)^2 \frac{1}{M V M}$$

nous arrivons donc à ce résultat que *l'inégalité $R > S$ a certainement lieu depuis le maximum qui précède l'instant t' jusqu'au premier maximum qui le suit.*

En considérant les maxima de la troisième classe, nous avons supposé que c'est la distance r_2 qui reste inférieure à q pour $R > R_0$ (cf. le commencement du n:o 24). Cependant, comme la limite S est symétrique par rapport aux trois masses m_0, m_1, m_2 , il est évident que le résultat que nous venons d'obtenir reste vrai aussi dans les cas où l'on a $r_0 < q$ ou $r_1 < q$ pour $R > R_0$. En somme on aura donc $R > S$ dans l'intervalle de temps compris entre deux maxima successifs quelconques. En observant encore que R ne saurait avoir qu'un nombre limité de maxima dans un intervalle fini de temps, et, d'autre part que, si la suite des maxima de R est limitée dans le sens des valeurs croissantes ou décroissantes de t , on aura, d'après ce qui précède, $R > S$ dans l'espace de temps infini qui suit le dernier ou précède le premier maximum de R , on arrive donc à ce résultat que, *dans le cas où l'on a $K > 0$ et $f > 0$ l'inégalité $R > S$ subsiste pour toutes les valeurs de t , pourvu que R admette du moins un maximum pour une valeur finie de t .*

Ce résultat et le dernier théorème du n:o 21 nous donnent en résumé cet important

Théorème: *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on aura toujours¹*

$$R \geq L,$$

où L désigne la quantité

$$\frac{f^2 R^0}{\left(R^0 \frac{dR^0}{dt}\right)^2 + f^2}$$

si $K \leq 0$, et, si $K > 0$, la plus petite des quantités

$$S \text{ et } \frac{f^2 R^0}{\left(R^0 \frac{dR^0}{dt}\right)^2 + 2 K R^{02} + f^2},$$

¹ Cette quantité L ne doit pas être confondue avec la quantité définie par l'égalité (76).

dont la première est définie par l'égalité (154).

On suppose bien entendu qu'on continue le mouvement après chaque choc comme il a été dit plus haut.

X.

Détermination d'une limite inférieure des rayons de convergence des développements suivant les puissances de $u - u_1$.

29. Le dernier théorème ci-dessus entraîne comme conséquence le

Théorème: Si $f > 0$, les deux plus grandes des distances r_0, r_1, r_2 restent constamment supérieures à la quantité

$$(155) \quad l = \frac{1}{3} \sqrt{m} L.$$

En effet, il suit de (21) que

$$R^2 = \frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{m}.$$

Si le théorème en question n'était pas vrai, deux au moins des distances r_0, r_1, r_2 admettraient à un certain instant des valeurs plus petites que l ou égales à l , et la troisième distance, étant au plus égale à la somme des deux premières, serait par suite au plus égale à $2l$, de sorte qu'on aurait

$$\frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{m} \leq \frac{6l^2}{m} = \frac{2}{3} L^2,$$

ou encore, d'après l'inégalité ci-dessus,

$$R^2 \leq \frac{2}{3} L^2,$$

ce qui est en contradiction avec le théorème du numéro précédent.

Arrivé à ce point, nous allons fixer d'une manière convenable la constante z_1 du n:o 13 et la constante z du n:o 5.

D'après les conditions (84) et (85), r_0 et r_1 sont les deux plus grandes des distances et, par suite, supérieures à l . En observant que $q > r_0 - r$ et $q > r_1 - r$, on en conclut que

$$q > 14 z_1$$

tant que

$$r < \frac{z_1}{2},$$

si l'on détermine z_1 par l'égalité

$$(156) \quad z_1 = \frac{2}{29} l = \frac{2}{87} V m L,$$

L désignant la quantité définie à la fin du no 28.

Nous fixerons dès maintenant la valeur de z_1 par cette formule (en supposant toujours $f > 0$). L'inégalité (84) entraîne alors comme conséquence l'inégalité (85), de sorte que nous pourrions désormais remplacer les conditions simultanées (84) et (85) par la seule condition (84), sans rien changer à la validité de nos résultats.

Afin que les conditions (37) et (84) s'excluent l'une l'autre, nous fixerons la valeur de z par l'égalité

$$(157) \quad z = \frac{z_1}{28} = \frac{L V m}{1218}.$$

30. Considérons un instant t_1 tel que, t tendant vers t_1 , la distance $r \equiv r_2$ tende vers une limite inférieure à $\frac{z_1}{2}$, de façon que nous aurons l'inégalité (84).

Nous avons montré que le mouvement de nos corps est représenté par certains développements suivant les puissances entières d'une variable auxiliaire $u - u_1$, et que ces développements sont certainement convergents pour les valeurs de u qui vérifient l'inégalité (108). En tenant compte de la signification de Q'_2 et de ce que la distance ϱ_1 est plus grande que la longueur $14 z_1$, on en conclut que les rayons de convergence des dits développements restent supérieurs à une quantité positive tant que la vitesse V_1 reste au dessous d'une limite finie, ce qui a lieu dans chaque intervalle fini de temps. Mais si, lorsque t croît ou décroît infiniment, la vitesse du corps P_2 ,

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

pouvait prendre des valeurs de plus en plus grandes, il pourrait en être de même de V_1 , et les rayons de convergence en question pourraient, par le temps, devenir aussi petits qu'on voudra. D'après (19), cette éventualité ne peut avoir lieu que si $(r)_1$ prend des valeurs de plus en plus petites quand t tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Nous démontrerons cependant dans ce numéro que cette éven-

tualité n'est pas à craindre, et que la vitesse V reste constamment au dessous d'une limite finie quand $r < \frac{z_1}{2}$.

Supposons donc que r soit la plus petite distance, d'où résulte que r_0 et r_1 sont plus grands que l . En posant

$$(158) \quad \mathcal{A} = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{2l} + \frac{m_0 m_1 m_2}{4M} |K|,$$

on peut alors tirer de l'intégrale (19) les inégalités

$$(159) \quad V^2 < 2g \left(\frac{m_0 m_1}{r} + 2\mathcal{A} \right)$$

et

$$(160) \quad \left| r \frac{dx}{dt} \right|, \left| r \frac{dy}{dt} \right| \text{ et } \left| r \frac{dz}{dt} \right| < V \sqrt{2hr(m_0 m_1 + 2\mathcal{A}r)}.$$

Il résulte de l'inégalité (159) que l'on aura

$$r < \frac{z_1}{2} \text{ tant que } V^2 \geq D,$$

où D désigne l'expression

$$(161) \quad D = 4g \left(\frac{m_0 m_1}{z_1} + \mathcal{A} \right),$$

et, en vertu de (159) et (160), on en conclut ce résultat:

Les inégalités

$$(162) \quad r < \frac{z_1}{2},$$

$$(163) \quad rV < \sqrt{2gz_1(m_0 m_1 + \mathcal{A}z_1)},$$

$$(164) \quad \left| r \frac{dx}{dt} \right|, \left| r \frac{dy}{dt} \right| \text{ et } \left| r \frac{dz}{dt} \right| < \sqrt{2hz_1(m_0 m_1 + \mathcal{A}z_1)}$$

ont toujours lieu tant que $V^2 \geq D$.

En faisant usage des inégalités (164), on tire d'ailleurs des équations (18)

$$|\xi \eta' - \eta \xi'| < A, \quad |\eta \zeta' - \zeta \eta'| < B, \quad |\xi \zeta' - \zeta \xi'| < C,$$

les quantités A, B, C ayant les valeurs

$$(165) \quad \begin{cases} A = g \left(|c_0| + 2 \sqrt{\frac{z_1}{h} (m_0 m_1 + A z_1)} \right), \\ B = g \left(|c_1| + 2 \sqrt{\frac{z_1}{h} (m_0 m_1 + A z_1)} \right), \\ C = g \left(|c_2| + 2 \sqrt{\frac{z_1}{h} (m_0 m_1 + A z_1)} \right). \end{cases}$$

Comme $\varrho > l - \frac{z_1}{2}$, il est évident, d'après (30), que l'inégalité

$$(166) \quad \left| \varrho \frac{d\varrho}{dt} \right| > W > 0,$$

où

$$(167) \quad W = \sqrt{V^2 \left(l - \frac{z_1}{2} \right)^2 - A^2 - B^2 - C^2},$$

a nécessairement lieu si V vérifie à la fois les conditions

$$(168) \quad V^2 \geq D, \quad V^2 \left(l - \frac{z_1}{2} \right)^2 - A^2 - B^2 - C^2 > 0.$$

D'autre part, on déduit aisément des équations (17) les suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d \left(\varrho \frac{d\varrho}{dt} \right)}{dt} &= V^2 - M \left[\frac{\lambda}{r_0^3} \frac{\varrho^2 - \mu (x \xi + y \eta + z \zeta)}{r_0} + \frac{\mu}{r_1^3} \frac{\varrho^2 + \lambda (x \xi + y \eta + z \zeta)}{r_1} \right], \\ \frac{dV^2}{dt} &= -2M \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} \right) \varrho \frac{d\varrho}{dt} + 2M\lambda\mu \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) (x \xi' + y \eta' + z \zeta'). \end{aligned}$$

A l'aide des inégalités démontrées au n:o 27,

$$|\varrho^2 - \mu (x \xi + y \eta + z \zeta)| \leq \varrho r_0,$$

$$|\varrho^2 + \lambda (x \xi + y \eta + z \zeta)| \leq \varrho r_1,$$

la première de ces équations nous donne

$$\frac{d \left(\varrho \frac{d\varrho}{dt} \right)}{dt} \geq V^2 - M \left(\frac{\lambda}{r_0} \frac{\varrho}{r_0} + \frac{\mu}{r_1} \frac{\varrho}{r_1} \right),$$

ou encore, puisque

$$\frac{\varrho}{r_0} \text{ et } \frac{\varrho}{r_1} < \frac{\varrho}{\varrho - \frac{z_1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{z_1}{2\varrho}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{28}} = \frac{28}{27},$$

$$(169) \quad \frac{d\left(\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right)}{dt} > V^2 - E,$$

en posant

$$(170) \quad E = \frac{28}{27} \frac{M}{l}.$$

La dérivée $\frac{dV^2}{dt}$ aura le même signe que $-\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ tant qu'on a

$$(171) \quad \left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) \left|\varrho \frac{d\varrho}{dt}\right| > \left|\lambda \mu \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) (x\xi' + y\eta' + z\zeta')\right|.$$

En observant que

$$\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3} > \lambda \mu \left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{r_1^3}\right),$$

et d'autre part, d'après (163),

$$|x\xi' + y\eta' + z\zeta'| \leq rV < V\sqrt{g z_1(m_0 m_1 + A z_1)},$$

on trouve, en vertu de (166), que l'inégalité (171) est vérifiée tant que

$$W \geq V\sqrt{g z_1(m_0 m_1 + A z_1)}.$$

En résumé on voit donc que la dérivée $\frac{dV^2}{dt}$ a le signe de la quantité $-\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ et que l'inégalité (169) a lieu tant que V vérifie à la fois les conditions

$$(172) \quad V^2 \geq D \text{ et } V^2 \left(l - \frac{z_1}{2}\right)^2 - A^2 - B^2 - C^2 - W^2 \geq g z_1(m_0 m_1 + A z_1).$$

Soit maintenant G_2 la plus grande des quantités positives

$$\sqrt{2E}, \sqrt{D} \text{ et } \frac{2}{2l - z_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + g z_1(m_0 m_1 + A z_1)};$$

il résulte de ce qui précède que les conditions (168) et (172) sont vérifiées et que l'inégalité (169) peut être remplacée par cette autre

$$(169 \text{ bis}) \quad \frac{d \left(\varrho \frac{d\varrho}{dt} \right)}{dt} > E,$$

si V vérifie l'inégalité

$$(173) \quad V > G_2.$$

Cela posé, il est facile de démontrer que V reste toujours plus petit que G_2 quand $r \equiv r_2$ est la plus petite des distances r_0, r_1 et r_2 .

En effet, autrement il y aurait un instant, soit t' , auquel V prendrait une valeur finie $V' (> G_2)$ et, d'après (166), on pourrait en conclure que $\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ admet pour $t = t'$ une valeur finie $\varrho' \frac{d\varrho'}{dt}$ qui vérifie l'une ou l'autre des inégalités

$$\varrho' \frac{d\varrho'}{dt} < -W',$$

$$\varrho' \frac{d\varrho'}{dt} > W',$$

W' désignant la valeur de W pour $t = t'$, laquelle, d'après ce qui précède, est plus grande que zéro.

Supposons d'abord qu'on ait

$$\varrho' \frac{d\varrho'}{dt} < -W'.$$

En faisant croître t depuis t' , la vitesse V , d'après la proposition démontrée ci-dessus, ira constamment en croissant tant que $\varrho \frac{d\varrho}{dt} \leq 0$, d'où résulte que la condition (173) et par suite aussi l'inégalité (169 bis) auront lieu lorsque

$$t \geq t' \text{ et } \varrho \frac{d\varrho}{dt} \leq 0.$$

D'après (169 bis), il viendra dès lors nécessairement après t' un instant t'' où $\varrho \frac{d\varrho}{dt}$ passera par zéro. Mais, puisque l'inégalité $V \geq G_2$, et par suite aussi les inégalités (168) sont vérifiées, on aurait au même instant t'' l'inégalité (166), ou

$$\left| \varrho \frac{d\varrho}{dt} \right| < 0.$$

Cette contradiction prouve qu'on ne saurait avoir $q' \frac{d\varrho'}{dt} < -W'$ à l'instant t' , et on démontre de même, en faisant cette fois décroître t depuis la valeur t' , qu'on ne saurait avoir non plus $q' \frac{d\varrho'}{dt} > W$. Nous en concluons que V reste toujours plus petit que G_2 quand $r - r_2 < \frac{\epsilon_1}{2}$.

C. Q. F. D.

31. Cherchons une limite supérieure simple de G_2 qui ne change pas par une permutation des quantités m_0, m_1, m_2 . En vertu des inégalités

$$g \leq \frac{3}{2m}, \quad m_0 m_1 < \frac{M^2}{4}, \quad \frac{1}{h} = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} < \frac{M}{4}, \quad g m_0 m_1 = \frac{M}{m_2} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} < \frac{M^2}{4m},$$

$$g \cdot l < \frac{M}{2l} + \frac{M}{16} |K|, \quad \frac{m_0 m_1 m_2}{M} < \frac{M^2}{27},$$

$$g(m_0 m_1 + l z_1) < M \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{z_1}{16} |K| \right), \quad D < \frac{4M}{z_1} \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{z_1}{16} |K| \right),$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \leq 2g^2 \left[c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \frac{4z_1}{h} (m_0 m_1 + l z_1) \right] < \frac{9}{2m^2} (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + \\ + \frac{3M^2 z_1}{m} \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{z_1}{16} |K| \right),$$

qui sont faciles à établir, on trouve que les expressions

$$V_2 \bar{E}, \quad V \bar{D} \quad \text{et} \quad \frac{2}{2l - z_1} V \overline{A^2 + B^2 + C^2 + g z_1 (m_0 m_1 + l z_1)}$$

sont toutes plus petites que la quantité

$$(174) \quad G = \frac{1}{14z_1} \sqrt{\frac{9}{2m^2} (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + \left(775 + \frac{3M}{m} \right) M z_1 \left(\frac{1}{29} + \frac{M}{4m} + \frac{z_1}{16} |K| \right)},$$

d'où suit qu'on aura aussi

$$(175) \quad G_2 < G.$$

Cela posé, on voit immédiatement que, pour calculer une limite inférieure de la quantité Q'_2 , c'est à dire de la plus petite des quotients (107), qui soit valable pour tous les temps, il suffira de prendre

$$V_1 = G$$

dans les expressions (104) et (107). On constate d'abord que les quatre dénominateurs

$$4(m_0 + m_1 + A_1 z_1), \quad m_0 + m_1 + \lambda_1 z_1, \quad \frac{m_2}{2} + 4(m_0 + m_1) + 3A_1 z_1, \quad 2\lambda_1 z_1 + m_2$$

sont tous plus petits que la quantité

$$4M + \frac{5M^2}{4m} + \frac{M}{m} G^2 z_1 + 3 \frac{M}{m} G \sqrt{M} z_1 + \frac{M}{2} |K| z_1,$$

et comme d'autre part

$$m_0 + m_1 + A_1 z_1 > \frac{4}{27} M \quad \text{et} \quad \frac{1}{2G + \sqrt{\frac{M}{z_1}}} < \sqrt{\frac{z_1}{M}},$$

on trouve que Q'_2 est plus grand que la plus petite des expressions

$$(176) \quad Q = \frac{\sqrt{\frac{z_1}{3M}}}{6 + \frac{15M}{8m} + \frac{3}{2m} G^2 z_1 + \frac{9}{2m} G \sqrt{M} z_1 + \frac{3}{4} |K| z_1}$$

et

$$2G + \sqrt{\frac{M}{z_1}}.$$

Or un calcul facile montre que Q est toujours la plus petite de ces expressions et on aura donc

$$(177) \quad Q'_2 > Q.$$

On en conclut que les développements des inconnues des équations (79) suivant les puissances de $u - u_1$ convergent certainement si u vérifie l'inégalité

$$(178) \quad |u - u_1| \leq Q.$$

XI.

Introduction d'une nouvelle variable indépendante ω .

32. Dans ce qui précède, nous avons employé au lieu de t une variable auxiliaire u dont la définition variait de cas en cas, selon la valeur de la constante t_0 et la distance r_0, r_1 ou r_2 qui était supposée petite. Nous voulons maintenant faire voir que la variable unique ω définie par les égalités

$$(179) \quad dt = \Gamma d\omega, \quad t = 0 \text{ pour } \omega = 0,$$

où

$$(180) \quad \Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_0}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_1}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_2}{l}}\right),$$

l étant défini par l'égalité (155), nous rend à chaque instant le même service que la variable u dont nous nous étions servi plus haut.

La fonction Γ a une valeur déterminée pour chaque valeur réelle du temps, et l'on aura constamment

$$(181) \quad 0 < \Gamma < 1,$$

d'où résulte que les variables ω et t croissent ou décroissent en même temps.

Il est facile de voir qu'à une valeur réelle et finie de t correspond toujours une et une seule valeur réelle et finie de ω , et réciproquement.

En effet, Γ étant positif quand les distances r_0, r_1, r_2 sont toutes plus grandes que zéro, on voit que ω ne peut devenir infiniment grand lorsque t tend vers une valeur finie, soit t_1 , que si l'une des distances r_0, r_1, r_2 s'annule pour $t = t_1$. Supposons par exemple que la distance $r \equiv r_2$ s'annule pour $t = t_1$. Introduisons au lieu de t la variable u définie par l'égalité (71), et désignons par u_1 la valeur finie vers laquelle tend u lorsque t tend vers t_1 . On aura

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Gamma},$$

et en observant que le second membre reste fini quand r tend vers zéro, on en conclut que ω tend également vers une valeur finie quand u tend vers u_1 ou t vers t_1 . On trouverait encore le même résultat si c'était la distance r_0 ou r_1 qui s'annule pour $t = t_1$.

La variable ω sera par conséquent *finie* lorsque t est fini, et comme d'autre part $|t| < |\omega|$, d'après (179) et (181), la proposition réciproque aura également lieu. Notre assertion est donc démontrée.

De tout cela il résulte que

$$\lim_{t=+\infty} \omega = +\infty, \quad \lim_{t=-\infty} \omega = -\infty,$$

$$\lim_{\omega=+\infty} t = +\infty, \quad \lim_{\omega=-\infty} t = -\infty.$$

33. Étant donnée une valeur quelconque réelle et finie de ω , soit $\bar{\omega}$, nous allons maintenant montrer que les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps sont développables en séries suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$, et que les rayons de convergence de ces développements restent supérieurs à une limite positive, quelle que soit la valeur $\bar{\omega}$.

Deux cas sont à distinguer:

Premier cas: Pour $\omega = \bar{\omega}$ l'une des distances r_0, r_1, r_2 est inférieure à $\frac{r_1}{2}$.

Admettons par exemple qu'on ait

$$r_2 < \frac{r_1}{2}.$$

Soit t_1 la valeur de t pour $\omega = \bar{\omega}$. En désignant par u_1 la valeur que prend la variable u pour $t = t_1$ ou $\omega = \bar{\omega}$, on sait, d'après les nos 13, 14 et 31, que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps seront développables suivant les puissances de $u - u_1$ et que les inégalités (94) auront lieu du moins tant que u vérifie l'inégalité

$$|u - u_1| \leq Q.$$

Les variables u et ω sont liées par l'équation

$$(182) \quad \frac{du}{d\omega} = \frac{r}{r}, \quad (u = u_1 \text{ pour } \omega = \bar{\omega}),$$

où le quotient $\frac{r}{r}$, qui est une fonction entière des quantités r, r_0, r_1 , est développable suivant les puissances des différences figurant dans la première ligne de (94) tant que les valeurs absolues de ces différences sont inférieures à $\frac{r_1}{2}$, et par suite aussi suivant les puissances de $u - u_1$ tant que $|u - u_1| \leq Q$.

Pour appliquer le théorème du n^o 4 à l'équation (182), nous devons encore trouver une limite supérieure de $\left| \frac{r}{r} \right|$ lorsque $|u - u_1| \leq Q$. Nous allons montrer qu'on a

$$\left| \frac{r}{r} \right| < \frac{1}{3z_1}.$$

En effet, nous avons vu que les conditions (84) et (94) entraînent l'équation (95) ainsi que l'inégalité

$$|P_1| < \frac{45}{49} r_0^2,$$

d'où résulte que la quantité r_0^2 ne devient jamais nulle ou négative et que, par conséquent, la partie réelle de r_0 ne change pas de signe. Comme les conditions (84) et (94) sont vérifiées quand $|u - u_1| \leq Q$, et comme la partie réelle de r_0 est positive pour $u = u_1$, on est donc sûr qu'elle reste positive tant que $|u - u_1| \leq Q$.

Il s'ensuit que $\left| e^{-\frac{r_0}{l}} \right| < 1$, d'où

$$\left| 1 - e^{-\frac{r_0}{l}} \right| < 2.$$

D'une manière analogue on trouve

$$\left| 1 - e^{-\frac{r_1}{l}} \right| < 2,$$

et, en observant qu'on a

$$\left| \frac{1 - e^{-\frac{r}{l}}}{r} \right| = \left| \frac{1}{l} - \frac{r}{2l^2} + \frac{r^2}{6l^3} - \dots \right| \leq \frac{1}{l} + \frac{z_1}{2l^2} + \frac{z_1^2}{6l^3} + \dots = \frac{e^{\frac{z_1}{l}} - 1}{z_1},$$

$$l = \frac{29}{2} z_1, \quad e^{\frac{2}{29}} - 1 < \frac{1}{12}$$

on voit donc que

$$\left| \frac{r}{r} \right| < \frac{1}{3z_1}$$

tant que $|u - u_1| < Q$.

En vertu du théorème de CAUCHY, nous pouvons donc conclure de l'équation (182) que $u - u_1$ est développable suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que

$$(183) \quad |\omega - \bar{\omega}| \leq 3Qz_1,$$

et que $|u - u_1| < Q$ si cette inégalité a lieu. Il en résulte que les coordonnées des corps, les distances r_0, r_1, r_2 et le temps sont développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que ω vérifie l'inégalité (183).

Comme z_1 et Q sont des fonctions symétriques des masses m_0, m_1, m_2 ce résultat ne serait pas changé si, au lieu de $r_2 < \frac{z_1}{2}$, on avait $r_0 < \frac{z_1}{2}$ ou $r_1 < \frac{z_1}{2}$ pour $\omega = \bar{\omega}$.

Second cas: Pour $\omega = \bar{\omega}$ toutes les distances r_0, r_1, r_2 sont $\geq \frac{z_1}{2}$, ou bien, d'après (157), $\geq 14z$.

Ce cas a déjà été étudié au n:o 5. Soit \bar{t} la valeur que prend t pour $\omega = \bar{\omega}$. Nous avons trouvé que les coordonnées des trois corps et les distances r_0, r_1, r_2 sont développables suivant les puissances de $t - \bar{t}$, et que les inégalités (43) ont lieu du moins tant que t vérifie l'inégalité (45).

En raisonnant comme ci-dessus, on trouve aisément qu'on a dans ce cas

$$\left| 1 - e^{-\frac{r_0}{t}} \right|, \left| 1 - e^{-\frac{r_1}{t}} \right| \text{ et } \left| 1 - e^{-\frac{r_2}{t}} \right| < 2,$$

et par suite

$$|T| < 8,$$

du moins tant que l'inégalité (45) a lieu. En vertu du théorème du n:o 4, il suit alors de (179) que $|t - \bar{t}| < T$ et que $t - \bar{t}$ est développable suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| \leq \frac{1}{8}T$. Donc les coordonnées des trois corps, les distances r_0, r_1, r_2 et le temps sont, dans ce second cas, développables suivant les puissances de $\omega - \bar{\omega}$ du moins tant que $|\omega - \bar{\omega}| \leq \frac{1}{8}T$.

Comme on a

$$\frac{1}{8}T = \frac{z_1 \sqrt[3]{\frac{M}{m}}}{224 \sqrt[3]{16 \frac{M}{m} + 3|K|z_1}}$$

$$3 Q z_1 = \frac{z_1 \sqrt{\frac{3 z_1}{M}}}{6 + \frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 z_1 + \frac{9}{2m} G V \sqrt{M z_1} + \frac{3}{4} |K| z_1}$$

nous arrivons donc en résumé à ce résultat final:

Les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps sont développables suivant les puissances entières de $\omega - \bar{\omega}$, quelle que soit la valeur réelle $\bar{\omega}$, et ces développements convergent certainement tant que

$$|\omega - \bar{\omega}| \leq \Omega,$$

où

$$(184) \quad \Omega = \frac{z_1 \sqrt{\frac{3 z_1}{M}}}{\frac{15}{8} \frac{M}{m} + \frac{3}{2m} G^2 z_1 + \frac{9}{2m} G V \sqrt{M z_1} + \frac{3}{4} |K| z_1 + 224 \sqrt{\frac{16}{m} + 3 |K| z_1}}$$

Rappelons que les quantités z_1 et G sont définies respectivement par les égalités (156) et (174), et que m désigne la plus petite des masses m_0, m_1, m_2 .

34. Les coordonnées des trois corps, leurs distances et le temps sont ainsi des fonctions régulières de ω dans une bande de largeur 2Ω comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et symétriques par rapport à cet axe. En introduisant une nouvelle variable τ par la transformation bien connue

$$(185) \quad \begin{cases} \omega = \frac{2\Omega}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau}, \\ \tau = \frac{e^{\frac{\pi \omega}{2\Omega}} - 1}{e^{\frac{\pi \omega}{2\Omega}} + 1} \end{cases}$$

toutes ces quantités, ainsi que ω , seront dès lors développables suivant les puissances de τ si $|\tau| < 1$. Les valeurs réelles de τ entre -1 et $+1$ correspondront univoquement aux valeurs réelles de t entre $-\infty$ et $+\infty$. Nous avons par suite trouvé ce théorème remarquable:

Si, dans le problème des trois corps, les constantes des aires ne sont pas toutes nulles, on peut, les coordonnées et les vitesses des corps étant données pour un certain moment fini, trouver deux constantes l et Ω , telles que, si l'on introduit au lieu de t une variable τ par les équations (179), (180) et (185), les coordonnées des trois corps, leurs distances mutuelles et le temps seront développables en séries suivant les puissances entières de τ , qui convergent pour $|\tau| < 1$ et représentent le mouvement pour

tous les temps, quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps, pourvu que l'on convienne de continuer le mouvement après un choc de la façon décrite plus haut.

On peut encore remarquer que les mêmes valeurs l et Ω conviennent à tout un groupe de mouvements correspondant à des circonstances initiales différentes, et qu'on peut calculer les termes des divers développements par des différentiations successives par rapport à τ dès qu'on a déterminé les valeurs de l et de Ω .

RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.¹

PAR

J. L. W. V. JENSEN

à COPENHAGUE.

Mes recherches sur la théorie des équations dont je vais exposer quelques points au deuxième Congrès des mathématiciens scandinaves, ont été commencées il y a plus de 25 ans. Jusqu'à présent, je n'en ai rien publié, non seulement parce que les matériaux que j'ai recueillis, étaient en évolution, lente il est vrai, mais aussi parce que mes occupations professionnelles ne me laissent que peu de loisir pour les publications scientifiques. Maintenant, que ces recherches sont essentiellement terminées, j'ai l'intention de les publier au fur et à mesure que me le permettront santé et loisir, en une série de cinq mémoires qui paraîtront en danois, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Danemark, et en français, de concert avec M. MITTAG-LEFFLER, dans les Acta Mathematica.

J'ai déjà présenté le sommaire du premier mémoire à la séance du 5 mai 1911 de l'Académie des Sciences, tandis qu'un point du deuxième mémoire a servi à une conférence faite à la société mathématique danoise le 16 mars 1911. Ce sont des propositions ayant rapport à ces deux communications que je me permettrai d'exposer ici, en les démontrant pour la plus grande partie.

La branche la plus importante de la théorie des équations, au point de vue des applications aux sciences naturelles ou à d'autres parties des mathématiques, est celle qui s'occupe de la séparation et du calcul approximatif des racines d'une

¹ Traduction de la conférence, faite le 29 et 31 août 1911 au deuxième Congrès des mathématiciens scandinaves à Copenhague et publiée dans le Compte-Rendu du congrès.

équation donnée, ou comme on pourrait également s'exprimer, des racines ou des zéros d'une fonction algébrique ou transcendante.

En ce qui concerne les équations algébriques, on serait disposé à présumer que le sujet a été essentiellement épuisé par les travaux de maîtres tels que ROLLE, DESCARTES, NEWTON, LAGRANGE, FOURIER, CAUCHY, GAUSS, STURM, JACOBI, BORCHARDT, SYLVESTER, HERMITE et BRIOSCHI. A ces travaux, on pourrait en ajouter d'autres, moins connus, mais également importants comme les recherches de DE GUA (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1741, pp. 92—95 et p. 95 et *Mémoires*... pp. 72—96 et pp. 435—494), où entre autres la règle de DESCARTES est prouvée pour la première fois et d'une manière simple, retrouvée plus tard par LAGUERRE et étendue par lui à des séries entières; celles de WARING (*Miscellanea analytica*, 1762, et *Meditationes algebraicæ*, 1770); les recherches de CAMPBELL, commentateur de l'*Arithmetica Universalis* de NEWTON (*Philosophical Transactions*, n:o 404, traduites en latin et ajoutées à la troisième édition de l'*Arithmetica* de 1732); celles d'OLIVIER, qui prouve avec simplicité et élégance pour la première fois une proposition de CAMPBELL (*Journal de Crelle*, t. 1); et enfin les recherches si variées de LAGUERRE que je m'excuse de nommer en dernier lieu tout en y attachant la plus grande importance.

Quant aux fonctions transcendantes, il en est tout autrement. On manque ici de méthodes pour traiter des fonctions d'une forme un peu générale. Ce fait est d'autant plus remarquable que d'importants problèmes attendent encore leur solution, faute de telles méthodes. Je n'ai qu'à rappeler la solution définitive du problème des nombres premiers où il s'agit de montrer qu'une fonction $\zeta(s)$ introduite dans la théorie des nombres par RIEMANN a toutes les racines imaginaires de la forme $\frac{1}{2} + \alpha i$, α étant réel. Mes recherches ont particulièrement eu pour but la solution du problème de RIEMANN. Pendant un certain nombre d'années, ces recherches n'ont abouti à aucun résultat, jusqu'à ce que j'aie compris qu'il importait de se procurer un nombre aussi grand que possible de méthodes pour traiter des classes de fonctions transcendantes, soit par l'extension de théorèmes connus sur la séparation et le nombre des racines des fonctions entières rationnelles aux fonctions transcendantes, soit par l'établissement de propositions nouvelles sur celles-ci. Nous verrons dans la suite des spécimens des deux sortes de théorèmes.

Je n'ai pas pris pour base de mes recherches la proposition la plus générale qu'on connaisse sur la séparation des racines d'une fonction entière rationnelle à coefficient réels, à savoir le théorème de STURM lequel se prête — du moins théoriquement — à une discussion complète. Il est vrai que BORCHARDT a mon-

tré, grâce aux expressions que SYLVESTER a données pour les fonctions de STURM, que l'on peut établir une série de déterminants symétriques, dépendant des sommes des puissances des racines, et dont les signes indiquent le nombre des racines imaginaires. Si l'on essaie de faire tendre à l'infini le degré de la fonction rationnelle donnée, tous ces déterminants deviendront infinis ou indéterminés et seront ainsi dépourvus de sens. Toutefois, ceci n'est point une difficulté réelle, car on peut, sans beaucoup de peine, transformer les déterminants de sorte qu'ils contiennent, au lieu des sommes des puissances positives des racines, des puissances négatives, et deviennent convergents pour des fonctions entières d'un genre donné fini. Les difficultés sont d'un tout autre caractère. La forme compliquée des expressions qu'on aurait à considérer, serait telle qu'il est même inutile de vouloir chercher à déterminer en pratique, par ce moyen, le caractère des racines d'une fonction rationnelle. Ce fait se présente à plus forte raison, dans le cas d'une fonction transcendante. Au début, j'ai donc eu recours à d'autres méthodes plus spéciales.

Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

une fonction entière, ayant tous ses coefficients réels, ce que j'appelle, pour me servir d'un terme abrégé, une fonction »réelle«. La fonction a, comme on sait, des racines imaginaires conjuguées deux à deux.¹ Si une telle fonction a précisément τ paires de racines imaginaires, où τ peut être zéro, entier positif ou infini, je dis pour abréger que le »type« de la fonction est τ . Ainsi par exemple $(1+x)^n$, e^x , e^{x^2} sont du type $\tau = 0$, tandis que $(1+x^2)^n$ est du type $\tau = n$.

Il y a une proposition connue de CAUCHY qui joue un rôle important dans mes recherches. Sous une forme spécialisée, elle peut s'exprimer de la manière suivante: Si la fonction entière réelle $F(x, t)$ qui dépend d'un paramètre réel t , lié à une suite de valeurs continues ou discrètes, converge pour $\lim t = t_0$ et pour des valeurs bornées de $|x|$ uniformément vers la fonction entière $F(x, t_0)$, les racines de $F(x, t)$ convergeront vers les racines de $F(x, t_0)$. Dans l'hypothèse que le type de $F(x, t)$ ait une limite supérieure finie γ , quand t s'approche de t_0 , on voit sans difficulté que le type de $F(x, t_0)$ doit être $\leq \gamma$, car les racines imaginaires peuvent converger vers des limites réelles, mais non inversement.

Nous verrons maintenant quelques conséquences du théorème de ROLLE et quelques extensions de celles-ci qui sont d'importance.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

¹ Je me sers toujours du terme »racines imaginaires« pour désigner des racines complexes et non réelles.

une fonction entière rationnelle du m^{e} degré, réelle et du type τ . Elle a dès lors $m - 2\tau$ racines réelles, et suivant le théorème de ROLLE, $f'(x)$ aura un nombre impair de racines réelles entre deux racines consécutives de $f(x)$ où il importe de tenir compte d'une manière bien connue des racines multiples. La fonction $f'(x)$ a donc $m - 2\tau - 1 + 2k_1$ racines réelles, où k_1 est zéro ou entier positif. Si nous désignons le type de $f'(x)$ par τ' on a ainsi $m - 2\tau - 1 + 2k_1 = m - 1 - 2\tau'$ ou $\tau - \tau' = k_1$. En répétant le même raisonnement pour les dérivées suivantes de $f(x)$, on trouve $\tau - \tau^{(m-1)} = k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1}$ avec des désignations faciles à comprendre. Si l'on s'exprimait comme il suit: La proposition de ROLLE montre que $f'(x)$ a normalement une racine réelle dans chaque intervalle des racines de $f(x)$ et d'ailleurs en tout $2k_1$ racines réelles *accessoires*, on pourrait exprimer ce qui vient d'être trouvé, ainsi: Le type de $f(x)$ est égal à la moitié du nombre des racines réelles *accessoires* de $f'(x)$, $f''(x)$, \dots , $f^{(m-1)}(x)$.¹

Il est évident que le type d'une fonction entière rationnelle ne peut augmenter par différentiation ce qui est d'ailleurs bien connu.

Soit $F(x)$ une fonction réelle, entière rationnelle ou transcendante dont nous déduisons une fonction rationnelle de la manière suivante. Supposons que le symbole $F(D)$, où D désigne le symbole de différentiation par rapport à x , se porte sur x^p , p étant un entier positif, nous obtenons par là une fonction rationnelle du degré p au plus, que voici

$$F(D) \cdot x^p = F(0)x^p + \binom{p}{1} F'(0)x^{p-1} + \binom{p}{2} F''(0)x^{p-2} + \dots + F^{(p)}(0) = F_p(x),$$

les $\binom{p}{n}$ désignant comme d'ordinaire des coefficients binomiaux. Comme on a

$$F'_p(x) = pF_{p-1}(x),$$

on voit que le type de $F_p(x)$ ne pourra jamais décroître pour p croissant. La fonction

$$(1) \quad \left(\frac{x}{p}\right)^p F_p\left(\frac{p}{x}\right) = F(0) + \frac{F'(0)}{1}x + \frac{F''(0)}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)x^2 + \dots + \frac{F^{(p)}(0)}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right)\dots\left(1 - \frac{p-1}{p}\right)x^p$$

est évidemment du même type que $F_p(x)$. On voit aisément que la fonction (1) converge *uniformément* vers $F(x)$ quand p tend vers l'infini, $|x|$ étant supposé borné.

¹ Pour être applicables dans tous les cas, les observations ci-dessus doivent être entendues de la manière suivante: si $f(x)$ a 0 ou 1 racines réelles, nous convenons de dire que $f'(x)$ en a normalement -1 ou 0.

La preuve en est si simple, grâce aux inégalités connues de CAUCHY-WEIERSTRASS pour les coefficients d'une série entière, que je peux m'en dispenser ici.

Si nous pouvons démontrer que le type de $F_p(x)$ a pour tous les p une limite supérieure γ , le type de $F(x)$ sera $\leq \gamma$. Ce principe est fréquemment appliqué dans mes recherches et nous en verrons dans ce qui suit quelques exemples importants.

Dans les *Meditationes algebraicæ* de WARING, on trouve une proposition qui peut être exprimée de la manière suivante:

Soit $f(x)$ une fonction entière rationnelle et du type τ , et soit a une constante réelle, la fonction

$$(2) \quad af(x) + f'(x) = (a + D) \cdot f(x)$$

sera tout au plus du type τ . On le prouve tout simplement en appliquant le théorème de ROLLE à $e^{ax}f(x)$, car on a

$$D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(af(x) + f'(x)).$$

Si nous répétons l'opération $(a + D)$ n fois avec des a différents ou égaux, nous avons démontré par là une proposition de POULAIN laquelle peut être exprimée ainsi:

Soit $g(x)$ une fonction entière rationnelle et du type 0, et soit $f(x)$ comme ci-dessus une fonction du type τ ,

$$(3) \quad g(D) \cdot f(x) = g(0)f(x) + \frac{g'(0)}{1}f'(x) + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n}f^{(n)}(x)$$

sera tout au plus du type τ , ce qui est d'ailleurs bien connu. Or, remplaçons dans (2) $f(x)$ par $e^{bx}f(x)$ où b est une constante réelle, nous trouvons que

$$(a + D) \cdot e^{bx}f(x) = e^{bx}((a + b)f(x) + f'(x))$$

est tout au plus du type τ . Par conséquent le théorème de POULAIN a été étendu au cas où $f(x)$ est remplacée par $e^{bx}f(x)$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction réelle, entière, du genre 0 ou 1 et du type fini τ . Soit

$$F_n(x) = ce^{c_n x} x^{\mu} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_v}\right)^{\frac{x}{\alpha_v}, 1}$$

¹ On se gardera de confondre cette notation avec celle de la page précédente.

où e^{cnx} est le facteur exponentiel extérieur,¹ α_r désigne les racines de $F(x)$ et n est d'une grandeur telle que toutes les racines imaginaires sont comprises dans le produit canonique. Comme nous venons de le prouver, le théorème de POULAIN s'applique à la fonction F_n et comme d'après WEIERSTRASS, le produit ci-dessus converge uniformément vers $F(x)$ pour $n = \infty$, $|x|$ étant borné, nous avons démontré de cette manière, que le théorème de POULAIN reste applicable, si $f(x)$ est remplacée par une fonction entière du genre 0 ou 1 et du type τ .

Voici un théorème encore plus général:

Soit $g(x)$ entière, rationnelle, du n^{e} degré et du type 0, et soit $F(x)$ entière, du genre $2q$ ou $2q + 1$ et du type τ , $g(D).F(x)$ sera tout au plus du type $\tau + qn$.

Je suis obligé d'omettre ici d'autres extensions du théorème de POULAIN concernant des fonctions $g(x)$ plus générales. Toutefois, il existe un cas spécial qui mérite une mention particulière.

Supposons en effet que dans la formule (3), nous posions $f(x) = x^p$, il s'ensuit que $g(D).x^p$ est du type 0. Nous pouvons y remplacer $g(x)$ par $e^{cx}g(x)$ où c est une constante réelle, car si l'opérateur e^{cD} se porte sur la fonction entière rationnelle $g(D).x^p$, le résultat devient, d'après la formule de TAYLOR, égal à $g(D).(x + c)^p$.² En raisonnant comme ci-dessus, nous obtenons la proposition suivante:

Si $G(x)$ est une fonction réelle, entière du genre 0 ou 1 et du type 0, $G(D).x^p$ sera du type 0.

Dans un cas spécial, cette proposition était connue à LAGUERRE.

Je ferai voir maintenant comment le théorème que nous venons de démontrer, peut être étendu à des fonctions de type quelconque fini.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

réelle et du type τ , et soit q un entier positif $\geq m$, la fonction

$$x^q f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^q + a_1x^{q-1} + \dots + a_mx^{q-m}$$

est également du type τ . En dérivant celle-ci $q - p$ fois par rapport à x ; p étant entier, positif et $< q$, nous aurons, suivant le théorème de ROLLE, que

¹ Si F est du genre 1, c_n est fixe, mais si F est du genre 0, $c_n = -\sum_{r=1}^n \frac{1}{\alpha_r}$.

² Je suppose qu'on connaît les règles les plus élémentaires pour le calcul des opérations distributives.

$$D^{q-p} \left(x^q f \left(\frac{x}{q} \right) \right) = \left[\frac{q}{p} \left(a_0 x^p + a_1^p x^{p-1} + a_2^p \frac{p(p-1)}{q(q-1)} x^{p-2} + \dots \right) - \left[\frac{q}{p} \right] q_T(x) \right]$$

est tout au plus du type r . Par conséquent

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^p q_T \left(\frac{x}{q} \right) = a_0 x^p + p a_1 x^{p-1} + p(p-1) a_2 x^{p-2} + \dots = f(D) \cdot x^p$$

sera tout au plus du type r .

En raisonnant comme ci-dessus, on voit aisément que la proposition que nous venons de démontrer, peut immédiatement être étendue au cas où $f(x)$ est remplacée par une fonction entière du genre 0 ou 1 et du type r , et en combinant ce résultat avec le principe précédemment démontré nous avons trouvé le théorème fondamental suivant:

Si $F(x)$ est une fonction réelle, entière, du genre 0 ou 1 et du type fini r , la fonction entière rationnelle $F(D) \cdot x^p$ sera tout au plus du type r , et si, inversement celle-ci est, pour un p quelconque, tout au plus du type r , $F(x)$ sera tout au plus du type r . A partir d'une certaine valeur de p , le type de $F(D) \cdot x^p$ sera précisément égal au type de $F(x)$.

Remarquons incidemment que cette proposition ne s'applique point aux fonctions de genre supérieur au premier.

Un exemple, tiré de mes recherches plus récentes, prouvera l'utilité du théorème que nous venons de démontrer. En faisant application combinée des propositions de DESCARTES et de STURM, M. E. MALO¹ a démontré la belle proposition qui suit: Si les fonctions réelles entières

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

ont toutes les deux leurs racines réelles, et si les coefficients de la dernière fonction sont tous positifs, toutes les racines de

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots$$

seront également réelles.

Soient $F(x)$ et $G(x)$ des fonctions réelles, entières du genre 0 ou 1 et du type 0, et soient les coefficients de $G(x)$ exclusivement positifs, $F(D) \cdot x^p$ et $G(D) \cdot x^p$

¹ Journal de Mathématiques spéciales, 4^e série, t. IV, 1895.

seront des fonctions rationnelles auxquelles je peux appliquer le théorème de MALO. J'obtiens donc que

$$\sum_{\nu=0}^p F^{(\nu)}(0) G^{(\nu)}(0) \left(\frac{p}{\nu}\right)^2 x^{p-\nu}$$

est du type 0. Si nous y remplaçons x par $\frac{p^2}{x}$, et que nous multiplions par $\left(\frac{x}{p^2}\right)^p$, nous obtenons l'expression

$$\sum_{\nu=0}^p \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{p}\right)^2 \cdots \left(1 - \frac{\nu-1}{p}\right)^2 x^{\nu}.$$

Si nous faisons croître p à l'infini, l'expression ci-dessus converge *uniformément*, pour $|x|$ borné, vers

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} \frac{G^{(\nu)}(0)}{\lfloor \nu} x^{\nu},$$

et de cette manière la *proposition de MALO est étendue aux fonctions entières transcendantes du genre 0 ou 1*. Dans ce cas, une application directe de la méthode de M. MALO aurait été impossible.

Une des applications les plus importantes qu'on puisse faire de notre théorème fondamental appartiendra à la dernière partie de mes recherches. Bien que je ne puisse communiquer sans compte-rendu détaillé des recherches intermédiaires les résultats définitifs sous une forme compréhensible, je puis en faire une indication. Le dernier mémoire s'occupera d'une classe de fonctions entières du genre un

$$(4) \quad F(x) = \int_0^{\infty} \psi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

où la fonction réelle $\psi(\alpha)$ qui peut être différenciée un nombre quelconque de fois tend vers zéro pour α croissant à l'infini, de sorte qu'on a uniformément pour des $|x|$ bornés

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi^{(\nu)}(\alpha) \cos \alpha x = 0, \text{ pour } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Cette classe de fonctions présente une importance particulière parce que la fonction ξ de RIEMANN

$$\zeta(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) (s-1) \zeta(s), \quad s = \frac{1}{2} + it,$$

y rentre comme cas spécial. En effet on a

$$\zeta(x) = \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \cos \alpha x d\alpha,$$

où

$$\Phi(\alpha) = \sum_{v=1}^{\infty} (8\pi^2 e^{2\frac{9}{\alpha}} v^4 - 12\pi e^{2\frac{5}{\alpha}} v^2) e^{-v^2 \pi e^{2\frac{1}{\alpha}}}.$$

Je me propose d'examiner, en général, les conditions auxquelles doit satisfaire $\Psi(\alpha)$ pour que la fonction (4) soit du type 0. En appliquant notre proposition fondamentale, nous voyons aussitôt que $F(x)$ est du type 0 dans le cas, et seulement dans le cas où la fonction entière rationnelle du $p^{\text{ième}}$ degré

$$\begin{aligned} F(D) \cdot x^p &= \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) \sum_{v=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \binom{p}{2v} (-1)^v x^{p-2v} \alpha^{2v} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Psi(\alpha) ((x+i\alpha)^p + (x-i\alpha)^p) d\alpha \end{aligned}$$

est également du type 0 pour p quelconque. Je parviens à établir des conditions nécessaires à cet égard; par l'application des résultats d'autres recherches que j'ai faites, celles-ci aboutissent à des conditions suffisantes, bien que non nécessaires, et ces dernières sont heureusement applicables à la fonction ζ . Cependant, la vérification même des conditions exige, par suite de la forme compliquée de $\Phi(\alpha)$, un calcul très pénible. Par la méthode ci-dessus, j'ai réduit le problème de RIEMANN de transcendant qu'il était à un problème algébrique.

Avant d'aborder la démonstration des propositions qui seront publiées dans mon mémoire n° 2, je dois communiquer d'autres résultats de mon premier mémoire. Je ne me restreins pas à déterminer le type des classes de fonctions que je traite, mais je trouve de plus des limites pour les racines imaginaires. GAUSS a démontré la proposition suivante: Si $f(x)$ est une fonction entière rationnelle avec de coefficients complexes et que, dans le plan complexe de la variable x , nous marquons les racines de $f(x)$, les racines de $f'(x)$ ne tomberont pas en dehors du polygone convexe le plus petit qui comprend les racines de

$f(x)$.¹ La démonstration se fait très facilement à l'aide de la dérivée logarithmique et en faisant observer qu'aucune racine de $f'(x)$ ne peut se trouver d'un côté d'une droite si les racines de $f(x)$ se trouvent toutes de l'autre côté de la droite ou sur celle-ci.

Pour une fonction $F(x)$ réelle, entière et du genre 0 ou 1 je démontre une proposition plus précise dans des cas étendus. Formons une figure composée de l'axe réel et des cercles qui ont pour diamètres les segments de droites joignant deux à deux les racines imaginaires conjuguées. Je démontre alors qu'aucune racine de $F'(x)$ ne peut se trouver en dehors de la figure, et il en est de même de la fonction $aF(x) + F'(x)$ où a est réelle. La même proposition garde encore sa validité pour $g(D).F(x)$, où $g(x)$ est une fonction réelle, entière rationnelle, du $n^{\text{ième}}$ degré et du type 0; toutefois les cercles sont à remplacer par des ellipses dont les petits axes se terminent chacun dans une paire de racines conjuguées de $F(x)$, tandis que les grands axes sont \sqrt{n} fois plus grands.

Si les racines de $F(x)$ sont toutes limitées à la bande $-\eta < \Re \left(\frac{x}{i} \right) < \eta$, les racines de $g(D).F(x)$ seront aussi limitées de la même manière, etc.

Je citerai encore une proposition qui comprend comme simples corollaires un grand nombre d'équations transcendentes, traitées jusqu'ici dans la littérature.

Soient

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

réelle, du genre 0 ou 1 et du type τ , $H(x)$ réelle, du genre 0 ou 1, du type 0 et ayant h racines positives, et $K(x)$ réelle, du genre 0, du type 0 et ayant toutes les racines négatives, la fonction entière

$$a_0 H(0) + a_1 \frac{H(1)}{K(0)} x + a_2 \frac{H(2)}{K(0)K(1)} x^2 + a_3 \frac{H(3)}{K(0)K(1)K(2)} x^3 + \dots$$

sera tout au plus du type $\tau + h$.

LAGUERRE prétend avoir démontré une proposition² qui est un simple corollaire de la proposition ci-dessus, à savoir le cas où $F(x)$ est rationnelle, $\tau = 0$, $h = 0$, en admettant même que $K(x)$ soit du premier genre. Toutefois cette dernière condition est inexacte. Comme LAGUERRE n'a pas achevé sa démonstration, on ne peut pas voir où se trouvait l'erreur.

¹ Cette proposition semble peu connue. Elle a été découverte de nouveau un nombre de fois par différents mathématiciens.

² Acta Mathematica, t. IV, 1881 et Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3^e série, t. IX, 1883; Oeuvres, I pp. 202 et 35.

Les théorèmes que je vais démontrer maintenant sont d'un caractère tout autre que celles dont il a été fait mention jusqu'ici.

Soit $F(z)$ une fonction entière de la variable complexe $z = x + iy$. Elle est supposée réelle, du genre 0 ou 1 et du type 0. On a donc le produit fini ou absolument convergent

$$F(z) = e^{c_0 + c_1 z} \prod_{(\alpha)} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha}},$$

où les constantes c ainsi que les racines α sont toutes réelles. Formons le carré de la valeur absolue de $F(z)$, j'obtiens évidemment

$$|Fz|^2 = e^{2c_0 + 2c_1 x} (x^2 + y^2)^\mu \prod \frac{(x - \alpha)^2 + y^2}{\alpha^2} e^{\frac{2x}{\alpha}} = (Fx)^2 \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^\mu \prod \left(1 + \frac{y^2}{(x - \alpha)^2}\right).$$

En développant le troisième membre de cette égalité en série entière de y^2 nous avons ainsi

$$|Fz|^2 = A_0 + A_2 y^2 + A_4 y^4 + \dots,$$

où les coefficients sont des fonctions positives de la variable réelle x , si celle-ci est différente d'une racine α . On voit, par la série de TAYLOR et d'après la formule de LEIBNIZ pour la différentiation d'un produit, que l'on a

$$\begin{aligned} |2^\nu A_{2\nu}| &= (-1)^\nu D_{\alpha=0}^{2\nu} (F(x + \alpha) F(x - \alpha)) = \\ &= \binom{2\nu}{\nu} (F^{(\nu)}(x))^2 - 2 \binom{2\nu}{\nu-1} F^{(\nu-1)}(x) F^{(\nu+1)}(x) + \dots + (-1)^\nu 2 F(x) F^{(2\nu)}(x). \end{aligned}$$

Pour que $F(z)$ soit du type 0 c'est donc une condition *nécessaire* que toutes les fonctions ci-dessus pour $\nu = 1, 2, 3, \dots$ soient positives ou zéro¹ pour toutes les valeurs réelles de x . Inversement, il est évident que ces conditions sont aussi *suffisantes*, car si elles sont toutes satisfaites $|Fz|^2$ n'est jamais décroissante pour x constant et y^2 croissant, et pour $y = 0$ on a $|Fz|^2 = (Fx)^2$. Si $F(x) \neq 0$, on aura $|Fz|^2 > 0$, et pour $F(x) = 0$, $|Fz|^2$ ne pourra être égale à zéro pour aucune valeur de y différente de zéro. S'il en était ainsi, $|Fz|^2$ serait constamment zéro et cela est impossible à moins que $F(z)$ ne se réduise précisément à zéro.

Ces conditions nécessaires et suffisantes, trouvées d'une manière si simple, sont souvent d'une application assez difficile dans la pratique.

¹ Le cas $\nu = 1$ nous donne la condition nécessaire $(F'(x))^2 - F(x)F''(x) > 0$, trouvée par LAGUERRE, toutefois, il faut ajouter au signe d'inégalité un signe d'égalité. Si l'égalité ne peut se produire, $F'(x)$ n'aura pas de racines multiples réelles. Je ne peux pas entrer ici en plus de détails.

Si nous différentions $|Fz|^2$ par rapport à y , nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2 = 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \dots$$

On en déduit ce qui suit.

Si $F(z)$ est du genre 0 ou 1, réelle et du type 0, on doit avoir

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2 = 2 \Re \left(\frac{1}{i} F(z) F'(\bar{z}) \right) = \frac{1}{2} (|Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2) > 0,$$

pour $y > 0$; (pour $y < 0$ il suffit d'intervertir le signe d'inégalité à cause de la symétrie par rapport à l'axe réel). Cependant, cette condition nécessaire est aussi suffisante, même si l'on remplace $>$ par \geq . En effet il résulte de l'inégalité (5) que $|Fz|^2$ ne peut pas décroître pour y positif et croissant, x étant supposé constant, et comme $|Fz|^2 = (Fx)^2$ pour $y = 0$, elle ne peut pas devenir zéro pour $y > 0$ sans l'être constamment.

Par conséquent, nous avons démontré le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction réelle $F(z)$, du genre 0 ou 1, soit du type 0 est que l'inégalité (5) ait lieu partout dans le demi-plan au dessus de l'axe réel, et ceci est même une condition suffisante quand $>$ est remplacé par \geq .¹

En d'autres termes: si l'on peut trouver, dans le demi-plan supérieur, une valeur de z pour laquelle $\frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2$ est négative, $F(z)$ aura de racines imaginaires; si une telle valeur n'existe pas, toutes les racines seront réelles.

Jusqu'à présent nous avons exclusivement fait usage d'une propriété du développement de $\frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2$, à savoir celle d'être non négatif pour les y positifs. Si l'on désire rendre la condition nécessaire aussi étroite que possible, on peut y parvenir en regardant un ou plusieurs termes du développement. Ainsi on trouve comme condition nécessaire:

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} |Fz|^2 \geq 2 ((F'x)^2 - F(x) F''(x)) \geq 0.$$

dans tout le plan, etc.

En me basant sur des considérations un peu plus générales que celles dont nous venons de faire emploi, je peux d'ailleurs démontrer le théorème plus étendu que voici:

¹ Evidemment ce n'est qu'en apparence que la condition suffisante est moins serrée que la condition nécessaire, c'est là un avantage pour les applications. Dans ce qui suit je rends encore plus grande la différence entre la condition nécessaire et la condition suffisante.

Si

$$\frac{d}{dy} |Fz|^2 \text{ ou } |Fz + iF'z|^2 - |Fz - iF'z|^2$$

est positive partout dans le demi-plan supérieur, à l'exception d'une certaine partie finie de celui-ci, la fonction réelle $F(z)$ du genre 0 ou 1 aura son type fini.

On peut donner à ces propositions bien d'autres formes, que je ne puis aborder ici et au sujet desquelles je suis obligé de renvoyer à mes recherches détaillées. Je me bornerai à mentionner les suivantes.

En considérant le développement

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 = 2A_2 + 4 \cdot 3A_4 y^2 + \dots,$$

on voit aussitôt que pour que toutes les racines soient réelles, on doit avoir dans tout le plan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 &= 2|F'z|^2 - 2\Re(F(z)F''(\bar{z})) = \\ (6) \quad &= 2|F'z|^2 - \frac{1}{2}|Fz + F''z|^2 + \frac{1}{2}|Fz - F''z|^2 \geq \\ &\geq 2A_2 = 2((F'x)^2 - F(x)F''(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Si inversement, on a partout

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} |Fz|^2 \geq 0,$$

$F(z)$ sera du type 0.

En effet, dans le dernier cas, $|Fz|^2$ sera une fonction convexe de la variable y et ne pourra avoir, par suite de la symétrie par rapport à l'axe réel, qu'un seul minimum et cela pour $y = 0$.

De même que plus haut, on a aussi la proposition plus étendue:

Si l'inégalité (7) a lieu en dehors d'une certaine partie finie du plan des z , $F(z)$ sera d'un type fini.

Il est assez intéressant d'appliquer ces propositions aux équations transcendentes traitées jusqu'à présent dans la littérature. On peut tirer des exemples de FOURIER, POISSON, CAUCHY, HURWITZ etc., ce qui donnera une idée de la facilité avec laquelle les critères que nous venons de développer sont applicables aux cas plus simples. Pour ne citer, en passant, qu'un exemple (emprunté à

CAUCHY), nous considérons l'équation très connue, $\sin z - z \cos z = 0$. Si son premier membre est désigné par $F(z)$, on aura

$$\begin{aligned} |F'z|^2 - \frac{1}{4}|Fz + F''z|^2 + \frac{1}{4}|Fz - F''z|^2 &= |z \sin z|^2 - |\sin z|^2 + |z \cos z|^2 = \\ &= (x^2 \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x) + (y^2 \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + (x^2 + y^2) \operatorname{sh}^2 y, \end{aligned}$$

où toutes les parenthèses sont ≥ 0 . Donc toutes les racines sont réelles.

Pour des fonctions d'un genre plus élevé que le premier, je démontre des théorèmes du même caractère, mais un peu plus compliqués.

Soit $F(z)$ réelle et du genre $2p$ ou $2p+1$, on aura, en supposant pour plus de simplicité qu'il n'existe pas de racines zéro,

$$F(z) = e^{g(z)} \prod_{(a)} \left(1 - \frac{z}{a}\right) e^{\frac{z}{a} + \dots + \frac{1}{2p+1} \left(\frac{z}{a}\right)^{2p+1}},$$

où

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{2p+1} z^{2p+1}$$

a tous les coefficients réels et où le produit, qui est fini ou absolument convergent, est étendu à toutes les racines a .

Si $F(z)$ est du genre $2p$, on doit avoir $c_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1} \sum \frac{1}{a^{2p+1}}$. Comme on le sait, les c sont aisément déterminées par différenciation de $\log F(z)$.

La condition nécessaire pour que toutes les racines soient réelles est qu'on ait constamment dans le demi-plan $y > 0$

$$|z^{2p} Fz + i F'z|^2 - |z^{2p} Fz - i F'z|^2 > |Fz|^2 (|z^{2p} + i g'z|^2 - |z^{2p} - i g'z|^2)$$

et la condition suffisante est de la même forme, toutefois, on peut y remplacer $>$ par \geq .

Je ne peux donner ici la démonstration de cette proposition qui, pour $p=0$, se réduit à une de celles que j'ai déjà indiquées.

Qu'il me soit permis, en terminant cette conférence, de faire usage d'une image intuitive, bien que peut-être un peu hasardée. Soit $F(z)$ une fonction analytique de $z=x+iy$, régulière à l'intérieur d'une certaine partie du plan des z . Je suppose celui-ci horizontal et j'élève en chacun de ses points une coordonnée verticale $\zeta = |Fz|^2$. Par là est définie une surface aux coordonnées orthogonales x, y, ζ , au sujet de laquelle j'ai démontré la proposition suivante.¹

¹ Nyt Tidsskrift for Matematik, t. XXI, 1910. Om den absolute Værdi af en analytisk Funktion (résumé d'une conférence faite à la société mathématique danoise le 19 mars 1908).

Si l'angle dièdre entre le plan des (x, y) et le plan tangent à la surface au point (x, y, ζ) est désigné par φ , on aura

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 4|F'(z)F''(z)|^2.$$

Le plan tangent n'est horizontal qu'en les points dont les projections tombent en des zéros de $F'(z)$ ou de $F''(z)$. Pour les premiers, le plan tangent coïncide avec le plan des z , pour ceux des derniers qui ne sont pas en même temps des zéros de $F'(z)$, le plan est tangent en un point parabolique de la surface.

On pourrait appeler une telle surface un «paysage analytique». Si l'on s'imaginait qu'il pleuvait dans ce paysage, l'eau s'accumulerait en les points les plus bas et formerait de petits lacs autour des zéros de $F'(z)$. Pour une fonction réelle du genre zéro ou un et du type zéro, le «paysage analytique» présenterait une vallée ayant de petits lacs le long de l'axe réel.



LÖSUNG DES ABSOLUTEN KONVERGENZPROBLEMS EINER ALLGEMEINEN KLASSE DIRICHLETSCHER REIHEN.

VON

HARALD BOHR

in KOPENHAGEN.

Einleitung.

Unter einer Dirichletschen Reihe der komplexen unabhängigen Variablen $s = \sigma + it$ wird bekanntlich eine unendliche Reihe der Form

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (1)$$

verstanden. Die Koeffizienten der Reihe, d. h. die Grössen a_n , sind hierbei beliebige reelle oder komplexe Zahlen, und die Exponenten λ_n sind reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \right)$$

genügen.

Bekanntlich hat Herr JENSEN¹ bewiesen, dass das Konvergenzgebiet der Reihe (1) eine Halbebene ist, welche von einer zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden begrenzt wird, d. h. es existiert eine reelle Zahl A (die Konvergenzabszisse der Reihe (1)) derart, dass die Reihe (1) für $\sigma > A$ konvergiert, für $\sigma < A$ dagegen nicht konvergiert. In den beiden Grenzfällen, wo die Reihe (1) überall bzw. nirgends konvergiert, wird $A = -\infty$ bzw. $A = +\infty$ gesetzt.

¹ Betreffs der Literatur werde ich auf das fundamentale Werk des Herrn LANDAU: »*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*» (Leipzig 1909) verweisen

Ferner ist bekanntlich, wie leicht zu beweisen, das Gebiet der absoluten Konvergenz einer Dirichletschen Reihe auch eine Halbebene, welche von einer zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden begrenzt wird, d. h. es existiert eine reelle Zahl B (die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1)) derart, dass die Reihe (1) für $\sigma > B$ absolut konvergiert, dagegen für $\sigma < B$ nicht absolut konvergiert; hierbei ist eo ipso $B \geq A$. Es ist also die Reihe (1) in der Halbebene $\sigma > B$ absolut konvergent, im Streifen $B > \sigma > A$ bedingt konvergent, und in der Halbebene $\sigma < A$ divergent. Es kann bekanntlich vorkommen, dass $A < +\infty$, $B = +\infty$ ist, d. h. dass die Reihe (1) ein Konvergenzgebiet besitzt ohne jedoch irgendwo absolut zu konvergieren; dies ist z. B. bei der Dirichletschen Reihe

$$\sum \frac{(-1)^n}{(\log n)^s} = \sum (-1)^n e^{-s \cdot \log \log n}$$

der Fall.

Ferner ist, wie von Herrn CAHEN bewiesen, bei jedem $\varepsilon > 0$, $E > 0$ die Reihe (1) im Gebiete $\sigma > A + \varepsilon$, $|s| < E$ gleichmässig konvergent. Hieraus folgt unmittelbar, da ja die einzelnen Glieder der Reihe (1), d. h. die Grössen $a_n e^{-\lambda_n s}$, ganze Transzendenten sind, dass die durch die Reihe (1) für $\sigma > A$ dargestellte Funktion $f(s)$ eine in der ganzen Halbebene $\sigma > A$ überall reguläre analytische Funktion ist.

Es sei eine Dirichletsche Reihe (1) gegeben; dann fragt sich: *wie weit konvergiert diese Reihe?* Eine solche Frage lässt sich auf verschiedene Weise auffassen. Man kann zunächst fragen: wie lassen sich die beiden Konvergenzabszissen A und B als Funktionen der Koeffizienten a_n und der Exponenten λ_n bestimmen? Diese Frage, welcher bei einer Potenzreihe die Frage nach dem Konvergenzradius als Funktion der Koeffizienten der Potenzreihe ganz entspricht, ist von Herrn CAHEN gelöst und zwar in ähnlicher Weise, wie die entsprechende Frage bei der Potenzreihe durch CAUCHY und HADAMARD seine Lösung gefunden hat. Die Frage: wie weit konvergiert eine Dirichletsche Reihe?, lässt sich aber auch ganz anders auffassen, nämlich: wie lassen sich die beiden Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und $\sigma = B$ bestimmen, nicht aus der Dirichletschen Reihe selbst, d. h. aus den Koeffizienten und Exponenten der Reihe, sondern aus der Kenntnis der analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion; oder genauer ausgedrückt: Es sei eine analytische Funktion $f(s)$ gegeben, und es sei bekannt, dass sie in einer gewissen Halbebene durch eine dort konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar ist; wie lässt sich alsdann die Lage der beiden Konvergenzgeraden der Reihe aus dem analytischen Charakter der Funktion erkennen? Dieses Problem, welches sich an die Frage in dieser

letzten Formulierung anknüpft, oder vielmehr an die Frage, inwiefern die Lage der beiden Konvergenzgeraden der Reihe mit einfachen analytischen Eigenschaften der Funktion in Zusammenhange steht, ist es, welches Problem man gewöhnlich als das *Konvergenzproblem* der Dirichletschen Reihen bezeichnet.¹

Ich werde im folgenden einfach vom Konvergenzproblem reden, wenn es sich um die Bestimmung der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ handelt, dagegen werde ich die Bezeichnung »das absolute Konvergenzproblem« benutzen, wenn es sich um die Bestimmung der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ handelt.

Bei einer Potenzreihe, für die das Konvergenzproblem mit dem absoluten Konvergenzproblem zusammenfällt, ist dies Problem bekanntlich einfach dahin zu beantworten, dass der Konvergenzkreis die dem Mittelpunkt am nächsten gelegene singuläre Stelle enthält. Bei den Dirichletschen Reihen gilt bekanntlich kein entsprechender Satz; so ist z. B. die Reihe

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^s} = \sum (-1)^n e^{-s \log n}$$

nur für $\sigma > 0$ konvergent, während die durch die Reihe dargestellte Funktion über die Achse des Imaginären hinaus regulär ist, ja sogar eine ganze Transzendente ist.

Über das Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen haben die Herren LANDAU und SCHNEE, unter gewissen einschränkenden Bedingungen für die Exponentenfolge der Reihe,² einige sehr interessante Sätze bewiesen, welche den Zusammenhang zwischen der Lage der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und der Gröszenordnung der Funktion $f(s)$ auf vertikalen Geraden (d. h. bei konstanter Abszisse und ins Unendliche wachsender Ordinate t) behandeln. Es geben je-

¹ Es sei die Funktion $f(s)$ in einer gewissen Halbebene durch eine dort konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar; dann lassen sich bekanntlich die Koeffizienten a_n und Exponenten λ_n dieser Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion $f(s)$ bestimmen. Mit Benutzung dieser Bemerkung kann man offenbar die von Herrn CANEX gefundenen Ausdrücke für die Konvergenzabszissen A und B so formulieren, dass man dadurch eine genaue Bestimmung der beiden Konvergenzgeraden $\sigma = A$ und $\sigma = B$ aus den analytischen Eigenschaften der Funktion erhält. Eine derart komplizierte und für die Anwendung völlig unbrauchbare Bestimmung der Konvergenzgeraden der Reihe aus den analytischen Eigenschaften der Funktion ist aber keineswegs als eine Lösung des Konvergenzproblems zu betrachten. Bei diesem letzten Problem handelt es sich ja eben darum, den etwaigen Zusammenhang zwischen der Lage der Konvergenzgeraden der Reihe und *einfachen* analytischen Eigenschaften der Funktion zu studieren. Vergl. in dieser Beziehung auch die interessante Arbeit des Herrn W. SCHNEE: »Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen« (Göttinger Nachrichten, Math. phys. Kl., 1910).

² Diese einschränkenden Bedingungen laufen im Wesentlichen darauf hinaus, dass die Exponenten λ_n nicht allzu dicht aneinander folgen dürfen, und dass ihre Verteilung nicht allzu unregelmässig sein darf.

doch diese Sätze nur hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Reihe (1) in einer Halbebene $\sigma > \text{Konst.}$, aber keine Bedingungen, die zu gleicher Zeit notwendig und hinreichend sind, und es ist somit das Problem: die Konvergenzgerade $\sigma = A$ einer Dirichletschen Reihe aus einfachen analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion genau zu bestimmen, nicht durch die oben erwähnten Untersuchungen gelöst. Es lässt sich sogar, wie ich in meiner Habilitationsschrift¹ bewiesen habe, eine genaue Bestimmung der Konvergenzgeraden $\sigma = A$ überhaupt nicht ermitteln, wenn man sich auf die Untersuchung der von den Herren LANDAU und SCHNEE betrachteten analytischen Eigenschaften der Funktion (d. h. der Regularität einerseits und der Grössenordnung von $f(\sigma + it)$ bei ins Unendliche wachsender Ordinate t anderseits) beschränkt.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung des absoluten Konvergenzproblems. Ich werde in dieser Abhandlung dieses Problem, welches meines Wissens bisher nicht direkt in Angriff genommen worden ist, für eine allgemeine Klasse Dirichletscher Reihen erledigen, nämlich für alle solche Reihen, deren Exponentenfolge im rationalen Körper linear unabhängig ist. Es ergibt sich für diese Klasse Dirichletscher Reihen, dass die absolute Konvergenzgerade $\sigma = B$ eine Gerade ist, welche sich aus den allereinfachsten analytischen Eigenschaften der durch die Reihe definierten Funktion genau bestimmen lässt.

Das Hauptziel dieser Abhandlung ist der Beweis des folgenden allgemeinen Satzes:

Es seien die Elemente der Zahlenfolge

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad (\lim \lambda_n = \infty) \quad (2)$$

linear unabhängig, d. h. es bestehe für kein ganzzahliges positives N eine Relation der Form

$$g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + \dots + g_N \lambda_N = 0$$

in ganzen rationalen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen g_1, g_2, \dots, g_N .

Es sei ferner

$$f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (1)$$

¹ »Bidrag til de Dirichletske Rækkers Teori« (Kopenhagen 1910), S. 34.

eine zur Zahlenfolge (2) gehörige Dirichletsche Reihe, die ein Konvergenzgebiet besitzt. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma > \sigma_0$ notwendige und hinreichende Bedingung, dass die durch die Reihe (1) definierte analytische Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt¹ ist.

In diesem Satze ist die Exponentenfolge (2) nur der rein arithmetischen Bedingung unterworfen, dass ihre Elemente linear unabhängig sein sollen. Die wesentliche Rolle, welche diese arithmetische Bedingung beim Studium des absoluten Konvergenzproblems der Dirichletschen Reihen spielt, habe ich schon an anderem Orte² gezeigt.

§ 1 des Folgenden behandelt die Frage nach den Werten, welche eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge auf einer im absoluten Konvergenzgebiete der Reihe gelegenen zu der reellen Achse senkrecht stehenden Geraden annimmt; ich beweise hier die Existenz eines Kreisringes derart, dass die angenommenen Werte sämtlich in diesem Kreisringe gelegen sind, und zwar in dem Kreisringe überall dicht liegen. Der Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf einen von KRONECKER herrührenden Satz über Diophantische Approximationen. Es ist die oben erwähnte arithmetische Bedingung der Exponentenfolge eben eingeführt, um diesen Satz über Diophantische Approximationen auf unsern Problemkreis verwenden zu können.

In § 2 werden aus dem Satze des § 1 einige für das Folgende wesentliche Hilfssätze gezogen.

In § 3 wird u. a. bewiesen: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > B$ absolut konvergent, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergent; dann nimmt die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an.

In § 4 beweise ich: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet, und es sei die durch

¹ Unter dem Ausdruck: »Eine Funktion $f(s)$ ist für $\sigma > \sigma_0$ beschränkt« ist zu verstehen: Es gibt eine positive Konstante K derart, dass, für $\sigma > \sigma_0$, $|f(s)| < K$ ist.

² »Sur la convergence des séries de Dirichlet«. (Comptes rendus, Paris, 1. August 1910). Die obige Bedingung unterscheidet sich wesentlich von allen Bedingungen, die man bei früheren Untersuchungen über Dirichletsche Reihen der Exponentenfolge auferlegt hat. Diese letzten Bedingungen behandeln nämlich stets die ungefähre Lage der Exponenten, sie sagen z. B. aus, dass die Exponenten nicht allzu dicht aufeinander folgen dürfen oder dergleichen; während die obige Bedingung des Textes eine arithmetische Bedingung ist, d. h. eine Bedingung, welche die genaue Lage der Exponenten betrifft.

die Reihe definierte Funktion für $\sigma > \beta$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe (I) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.

In § 5 erinnere ich an einen Hilfssatz des Herrn PERRON.

In § 6 wird der oben erwähnte Hauptsatz bewiesen. In diesem Satze ist über das Konvergenzverhalten der Reihe nur vorausgesetzt, *dass sie überhaupt ein Konvergenzgebiet besitzt*; beim Satze des § 4, welcher Satz in dem Hauptsatze als spezieller Fall enthalten ist, war noch die weitere Bedingung hinzugefügt, dass die Reihe ein *absolutes* Konvergenzgebiet besitze.

In den vorangehenden Sätzen war der Exponentenfolge die einzige Bedingung auferlegt, dass sie linear unabhängig sei; dass diese Bedingung aber eine *wesentliche* ist, d. h. dass die Sätze, wenn diese Bedingung weggelassen wird, nicht mehr gelten, wird schliesslich in § 7 durch passend konstruierte Beispiele bewiesen. Es wird hier u. a. die Existenz einer, in einer gewissen Halbebene konvergenten, Dirichletschen Reihe bewiesen, die eine für $\sigma \geq 0$ reguläre und beschränkte Funktion definiert, und die jedoch nirgends absolut konvergiert.

In einer späteren Abhandlung werde ich die in dieser Arbeit dargestellte Theorie auf einige spezielle Dirichletsche Reihen verwenden, sowie eine ähnliche Theorie derjenigen Dirichletschen Reihen entwickeln, welche in der analytischen Primzahlentheorie die Hauptrolle spielen, nämlich derjenigen Dirichletschen Reihen vom Typus $\sum \frac{a_n}{n^s}$, welche eine Produktdarstellung einer der beiden Formen

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{b_p}{p^s} \right), \quad \sum \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 + \frac{b_p}{p^s} \right)}$$

zulassen, wo p die Primzahlen 2, 3, 5... durchläuft.

§ 1.

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (1)$$

eine zur linear unabhängigen Zahlenfolge (2) gehörige Dirichletsche Reihe, die auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergiert; d. h. es sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

konvergent.

Ich werde dann in diesem Paragraph untersuchen, welche Werte die Funktion $f(s) = f(\sigma + it)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt.

Es sei die folgende Hilfsbetrachtung vorausgeschickt. Es sei

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots \quad (3)$$

eine unendliche Folge von reellen, nicht negativen Zahlen derart, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

konvergiert und etwa die Summe R besitzt. Ich werde dann zunächst die Werte bestimmen, welche die unendliche Reihe

$$F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n}$$

annimmt, wenn die Grössen $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ unabhängig von einander sämtliche reelle Werte, oder, was auf dasselbe herauskommt, sämtliche reelle Werte zwischen 0 (incl.) und 2π (excl.) durchlaufen.

Es sei das Gebiet G folgendermassen definiert:

Fall 1. Wenn in der Zahlenfolge (3) ein Element q_{n_1} vorhanden ist, das grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder, d. h. wenn

$$q_{n_1} > \sum_{n \neq n_1} q_n = R - q_{n_1}$$

ist, bezeichne ich mit G den Kreisring (incl. Begrenzung)

$$R \geq |z| \geq r,$$

wo

$$r = q_{n_1} - \sum_{n \neq n_1} q_n = 2 q_{n_1} - R$$

ist.

Fall 2. Wenn dagegen in der Zahlenfolge (3) kein Element vorhanden ist, das grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder, bezeichne ich mit G den Kreis (incl. Rand)

$$|z| \leq R.$$

Es gilt nunmehr der folgende

Hilfssatz 1: *Es liegen die Werte von*

$$F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n}$$

sämtlich im Gebiete G , und es wird jeder Wert im Gebiete G angenommen.

Beweis: Da, für jede reelle Folge $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$, im Falle 1

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} q_n > \left| \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n} \right| \geq q_{n_1} - \sum_{n \neq n_1} q_n = r$$

ist, im Falle 2

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n} \right| \leq R$$

ist, sieht man zunächst, dass die Werte von $F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$ sämtlich im Gebiete G liegen. Ferner ist klar, dass, wenn die Funktion F den Wert z' annimmt, nimmt sie gewiss jeden Wert z an, für den $|z| = |z'|$ ist, d. h. jeden Wert auf dem Kreis mit 0 als Mittelpunkt und $|z'|$ als Radius; denn, wenn

$$F(q'_1, q'_2, \dots, q'_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} q'_n e^{i q'_n} = z' = |z'| e^{i \theta'}$$

und

$$z = |z'| e^{i \theta}$$

ist, so ergibt sich ja unmittelbar

$$\begin{aligned} F(q'_1 + \theta - \theta', q'_2 + \theta - \theta', \dots, q'_n + \theta - \theta', \dots) &= \sum_{n=1}^{\infty} q'_n e^{i(q'_n + \theta - \theta')} \\ &= e^{i(\theta - \theta')} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q'_n e^{i q'_n} = e^{i(\theta - \theta')} z' = z. \end{aligned}$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, genügt es daher offenbar nachzuweisen, dass die Funktion

$$|F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n} \right|$$

im Falle 1 jeden reellen Wert zwischen r und R (beide incl.), im Falle 2 dagegen jeden Wert zwischen 0 und R (beide incl.) annimmt.

Beweis des Falles 1. Es sei speziell

$$q_{n_1} = 0, \quad q_n = q(n - n_1)$$

gesetzt, wo q das Intervall 0 (incl.) bis $2r$ (excl.) durchläuft. Dann durchläuft in der komplexen Ebene die Zahl

$$P(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n} = q_{n_1} + (R - q_{n_1}) e^{i q}$$

einen Kreis mit dem Mittelpunkte q_{n_1} und dem Radius $R - q_{n_1}$, also Punkte, deren Abstand vom Nullpunkte alle reellen Werte von

$$q_{n_1} - (R - q_{n_1}) = 2q_{n_1} - R = r$$

bis

$$q_{n_1} + (R - q_{n_1}) = R$$

(beide incl.) annimmt. q. e. d.

Beweis des Falles 2. Es darf offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise angenommen werden, dass

$$q_1 > q_2 > q_3 > \dots > q_n > \dots$$

ist. Ferner darf $q_1 > 0$ angenommen werden, denn im Falle $q_1 = 0$, d. h. $q_n = 0$ für alle n , ist der Satz von vornherein klar.

Es sei nunmehr N diejenige (gewiss existierende) Zahl, für die

$$\sum_{n=1}^N q_n > \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n$$

ist, während

$$\sum_{n=1}^{N-1} q_n < \sum_{n=N}^{\infty} q_n$$

ist. Hierbei ist eo ipso $N \geq 2$. Es sei

$$\alpha = q_1, \quad \beta = \sum_{n=2}^N q_n, \quad \gamma = \sum_{n=N+1}^{\infty} q_n$$

gesetzt. Dann erfüllen die drei nicht negativen Zahlen α , β und γ , deren Summe gleich R ist, die drei Relationen

$$\alpha + \beta \geq \gamma, \quad \alpha + \gamma \geq \beta, \quad \beta + \gamma \geq \alpha; \quad (4)$$

denn es ist nach Voraussetzung

$$\alpha + \beta = \sum_{n=1}^N \varrho_n > \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n = \gamma$$

sowie

$$\beta + \gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n \geq \varrho_1 = \alpha,$$

und aus

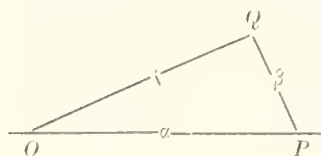
$$\sum_{n=1}^{N-1} \varrho_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} \varrho_n$$

d. h.

$$\alpha + \beta - \varrho_N \leq \gamma + \varrho_N$$

folgt

$$\alpha + \gamma \geq 2\alpha + \beta - 2\varrho_N = \beta + 2\varrho_1 - 2\varrho_N \geq \beta.$$



Aus (4) folgt nunmehr unmittelbar (siehe Figur), dass in der komplexen Ebene zwei Punkte P und Q derart existieren, dass P auf der reellen Achse rechts vom Nullpunkte O liegt, und das

$$OP = \alpha, \quad \overline{PQ} = \beta, \quad \overline{QO} = \gamma$$

ist; mit anderen Worten, es folgt aus (4) die Existenz einer komplexen Zahl q (der Zahl, die dem Punkte Q entspricht) derart, dass

$$|q - \alpha| = \beta, \quad |q| = \gamma$$

ist. Es sei

$$q - \alpha = \beta e^{i\theta_1}, \quad -q = \gamma e^{i\theta_2};$$

dann ist offenbar

$$\alpha + \beta e^{i\theta_1} + \gamma e^{i\theta_2} = 0.$$

Ich wähle nunmehr speziell

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_N = t \cdot \theta_1; \quad \varphi_{N+1} = \varphi_{N+2} = \dots = t \cdot \theta_2,$$

wo die reelle Variable t von 0 bis 1 (beide Grenzen incl.) läuft. Dann ist

$$|F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{i q_n} \right| = |\alpha + \beta e^{i t \theta_1} + \gamma e^{i t \theta_2}|$$

eine stetige Funktion $F_1(t)$ von t . Weil aber für $t=0$

$$|\alpha + \beta e^{i t \theta_1} + \gamma e^{i t \theta_2}| = \alpha + \beta + \gamma = R$$

ist, und für $t=1$

$$|\alpha + \beta e^{i t \theta_1} + \gamma e^{i t \theta_2}| = |\alpha + \beta e^{i \theta_1} + \gamma e^{i \theta_2}| = 0$$

ist, nimmt die obige Funktion $F_1(t) = |F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)|$ alle Werte von 0 bis R (beide incl.) an. q. e. d.

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen.

Bevor ich zu der am Anfang des Paragraphen erwähnten Untersuchung übergehe, erinnere ich noch an den folgenden KRONECKER'schen Satz über Diophantische Approximationen, welcher für unsere Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielt.

Hilfssatz 2: Wenn N linear unabhängige reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ und N beliebige reelle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben sind, so gibt es ein reelles T und N ganze Zahlen g_1, g_2, \dots, g_N derart, dass die N Ungleichungen

$$|T\lambda_1 - \mu_1 - g_1| < \varepsilon$$

$$|T\lambda_2 - \mu_2 - g_2| < \varepsilon$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|T\lambda_N - \mu_N - g_N| < \varepsilon$$

sämtlich erfüllt sind.

Ich gehe nunmehr zum Beweis des folgenden allgemeinen Satzes über.

Satz 1: Es sei die Dirichletsche Reihe (I) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, und es sei für alle $n = 1, 2, 3, \dots$

$$|a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = q_n$$

gesetzt. Es bezeichne ferner $G = G(\sigma_0)$ das auf Seite 203 definierte Gebiet (also den Kreisring $r \leq |z| \leq R$, bzw. den Kreis $|z| < R$). Dann ist, für jedes reelle t , $f(\sigma_0 + it)$ im Gebiete G gelegen, und es liegen die Werte von $f(\sigma_0 + it)$ ($-\infty < t < \infty$) überall dicht im Gebiete G .

Beweis: Dass die Werte von

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0 + it)} \quad (-\infty < t < \infty)$$

sämtlich im Gebiete G liegen, ist, wegen $|a_n e^{-\lambda_n(\sigma_0 + it)}| = |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \varrho_n$, unmittelbar klar. Es sei nunmehr z eine beliebige Zahl im Gebiete G (incl. Rand), und es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann ist zu beweisen: es gibt ein reelles T derart, dass

$$|f(\sigma_0 + iT) - z| < \delta$$

ist. Die Existenz eines solchen T wird folgendermassen nachgewiesen. Es sei N so gewählt, dass

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varrho_n < \frac{\delta}{3}$$

ist, und N fest. Es sei ferner, was nach dem Hilfssatze 1 möglich ist, eine Folge reeller Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ so gewählt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n e^{i\varphi_n} = z$$

ist, d. h. dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \cdot e^{i\varphi_n} = z$$

ist. Dann ergibt sich für jedes reelle t , indem ich für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ die Amplitude der Grösse a_n durch α_n bezeichne,

$$\begin{aligned} |f(\sigma_0 + it) - z| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{i\alpha_n} e^{-\lambda_n(\sigma_0 + it)} - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} e^{i\varphi_n} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} (e^{i(\alpha_n - \lambda_n t)} - e^{i\varphi_n}) \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \\ &< \sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} |e^{i(\alpha_n - \lambda_n t)} - e^{i\varphi_n}| + \frac{2\delta}{3} \end{aligned}$$

d. h.

$$|f(\sigma_0 + it) - z| < \sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \left| 1 - e^{2\pi i \left(\frac{\lambda_n}{2\pi} t - \frac{\alpha_n - \varphi_n}{2\pi} \right)} \right| + \frac{2\delta}{3}. \quad (5)$$

Es sei nunmehr, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, $\varepsilon > 0$ so (d. h. so klein) gewählt, dass die Summe der N Glieder

$$\sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} \cdot |1 - e^{2\pi i \theta_n}|$$

kleiner als $\frac{\delta}{3}$ ist, wenn, für alle $n = 1, 2, \dots, N$, die reelle Zahl θ_n von einer ganzen Zahl g_n um weniger als ε abweicht. Wir bestimmen alsdann, was nach dem Hilfssatz 2 möglich ist, ein reelles T sowie N ganze Zahlen g_1, g_2, \dots, g_N derart, dass für alle $n = 1, 2, \dots, N$

$$\left| \frac{\lambda_n}{2\pi} \cdot T - \frac{\alpha_n - g_n}{2\pi} - g_n \right| < \varepsilon$$

ist. Für dieses T ergibt sich dann weiter nach (5)

$$|f(\sigma_0 + iT) - z| < \frac{\delta}{3} + 2 \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Hiermit ist der Satz I bewiesen.

§ 2.

Wir ziehen nunmehr in diesem Paragraphen einige für das Folgende wesentliche Folgerungen aus dem Satze des § 1.

Satz 2^a: *Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent; es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert ein reelles t_0 derart, dass*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + it_0)} \right| < \varepsilon \quad (6)$$

ist.

Beweis: Es habe $G = G(\sigma_0)$ die Bedeutung des § 1, d. h. es bezeichne G den Kreisring $r \leq |z| \leq R$ bzw. den Kreis $|z| \leq R$. Dann folgt die Existenz eines reellen t_0 , für das (6) erfüllt ist, unmittelbar daraus, dass einerseits die Zahl

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

dem Gebiete G angehört, während anderseits die Werte von

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + it)} \quad (-\infty < t < \infty)$$

in dem Gebiete G überall dicht liegen.

Hiermit ist der Satz 2^a bewiesen.

Da

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

ist, folgt aus dem Satze 2^a unmittelbar der

Satz 2^b: *Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert ein reelles t_0 derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\sigma} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist.

Wir brauchen für das Folgende den Satz 2^b in der folgenden allgemeineren Formulierung:

Satz 2^c: *Es seien die Elemente der Zahlenfolge (2) linear unabhängig, es seien die $M + 1$ zur Zahlenfolge (2) gehörigen Dirichletschen Reihen*

$$f_0(s) = \sum_{n=1}^{\sigma} a_n^{(0)} e^{-\lambda_n s}, f_1(s) = \sum_{n=1}^{\sigma} a_n^{(1)} e^{-\lambda_n s}, \dots, f_M(s) = \sum_{n=1}^{\sigma} a_n^{(M)} e^{-\lambda_n s}.$$

sämtlich für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergent, und es sei für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{Amplitude } (a_n^{(0)}) = \text{Amplitude } (a_n^{(1)}) = \dots = \text{Amplitude } (a_n^{(M)}); \quad (7)$$

es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein reelles t_0 derart, dass gleichzeitig, für alle $m = 0, 1, \dots, M$,

$$\sum_{n=1}^{\sigma} |a_n^{(m)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\sigma} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist.

Beweis: Wir betrachten die für $\sigma = \sigma_0$ absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\sigma} b_n e^{-\lambda_n s},$$

wo, für alle $n = 1, 2, 3, \dots$

$$b_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \dots + a_n^{(M)}$$

ist. Hierbei ist auf Grund von (7)

$$|b_n| = |a_n^{(0)}| + |a_n^{(1)}| + \dots + |a_n^{(M)}|.$$

Wir wählen nunmehr, was nach dem Satze 2^b möglich ist, ein reelles t_0 derart, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist, oder anders geschrieben derart, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(M)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} \right) - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(M)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist, also a fortiori derart, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(M)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} \right) - \left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(0)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| + \dots + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(M)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| \right) < \varepsilon \quad (8)$$

ist. Wegen der für alle $m = 0, 1, 2, \dots, M$ giltigen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| > 0$$

folgt aber unmittelbar aus (8), dass für jedes $m = 0, 1, 2, \dots, M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(m)}| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)} e^{-\lambda_n (\sigma_0 + i t_0)} \right| < \varepsilon$$

ist. q. e. d.

Korollar: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > \alpha$ absolut konvergent; dann ist bekanntlich, wie sehr leicht zu beweisen, für jedes $m = 0, 1, 2, \dots$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^m e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > \alpha$ absolut konvergent und stellt die Funktion $f^{(m)}(s)$ dar. Ferner ist ja

$$\text{Amplitude } (a_n \lambda_n^m) = \text{Amplitude } (a_n).$$

Es lässt sich daher der Satz 2^c auf den Fall anwenden, wo $\sigma_0 = \alpha + 1$ ist, während für jedes $m = 0, 1, 2, \dots, M$

$$f_m(s) = (-1)^m f^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n s}$$

ist. Dies werden wir später verwenden.

Satz 3: Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > B$ absolut konvergent, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergent; dann ist die durch die Reihe (1) dargestellte Funktion $f(s)$ für $\sigma > B$ nicht beschränkt, d. h. nach Annahme einer beliebig grossen positiven Grösse K lässt sich eine Zahl $s_0 = \sigma_0 + it_0$ derart wählen, dass

$$\sigma_0 > B, \quad |f(s_0)| > K$$

ist.

Beweis: Aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

folgt die Existenz eines ganzzahligen N derart, dass

$$\sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n B} > K + 1$$

ist. Nunmehr wählen wir ein $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$\sum_{n=1}^N |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} > K + 1$$

ist, was aus Stetigkeitsgründen möglich ist; dann ist a fortiori

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} > K + 1.$$

Ferner lässt sich nach dem Satze 2^a ein reelles t_0 derart wählen, dass

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (\sigma_0 + it_0)} \right| < 1$$

¹ An Stelle von 1 könnte natürlich auch jede andere positive Konstante stehen.

ist. Dann ergibt sich für dieses t_0

$$|f(\sigma_0 + it_0)| \geq \sum_{n=1}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - \left| \sum_{n=1}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} - f(\sigma_0 + it_0) \right| > K + 1 - 1 = K.$$

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

§ 3.

Es möge die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet besitzen; ich werde dann in diesem Paragraph diejenigen Werte bestimmen, welche die Funktion $f(s)$ im absoluten Konvergenzgebiet der Reihe annimmt. Es sei zunächst derjenige Fall betrachtet, in dem die Reihe eine im Endlichen gelegene absolute Konvergenzgerade $\sigma = B$ besitzt, d. h. es sei B endlich und die Reihe (1) für $\sigma > B$ absolut konvergent, für $\sigma < B$ nicht absolut konvergent. Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Reihe (1) auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergiert oder nicht. Ich fasse zunächst den zweiten Fall ins Auge. Es gilt hier der folgende

Satz 4^a: *Es möge die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma > B$ absolut konvergieren, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergieren. Dann nimmt die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an.*

Dem Beweis dieses Satzes wird der folgende, mit Benutzung des Satzes 1 sehr leicht beweisbare Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz 3: *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 4^a erfüllt, und es sei die komplexe Zahl a beliebig gegeben. Dann existiert eine reelle Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass die Funktion*

$$\frac{1}{f(s) - a}$$

für $\sigma > \sigma_0$ regulär ist, sowie, bei jedem $0 < \varepsilon < 1$, im Streifen

$$\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$$

beschränkt ist, während sie auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt ist.

Beweis: Aus der vorausgesetzten Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

für $\sigma \leq B$ folgt zunächst, dass die Koeffizienten a_n der Reihe (1) nicht sämtlich gleich 0 sind. Es darf daher offenbar beim Beweise $a_1 \neq 0$ angenommen werden. Es habe, bei jedem festen $\sigma > B$, das Gebiet $G = G(\sigma)$ die Bedeutung des § 1 (d. h. es sei G der Kreisring $r \leq |z| \leq R$ bzw. der Kreis $|z| \leq R$). Es sind nunmehr zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die gegebene Zahl a verschieden von 0 oder gleich 0 ist.

Fall 1. $a \neq 0$.

Es sei, für jedes $\sigma > B$,

$$R = R(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

gesetzt; die hier für $\sigma > B$ definierte Funktion $R(\sigma)$ ist dann bekanntlich, und wie sehr leicht zu beweisen, eine stetige Funktion, die mit wachsendem σ stets abnimmt, und es ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} R(\sigma) = 0; \quad \lim_{\sigma \rightarrow B} R(\sigma) = \infty.$$

Es folgt hieraus die Existenz einer reellen Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$R(\sigma_0) = |a|$$

ist. Dann ist, für $\sigma > \sigma_0$

$$|f(s) - a| \geq |a| - |f(s)| \geq |a| - R(\sigma) = R(\sigma_0) - R(\sigma) > 0,$$

also $\frac{1}{f(s) - a}$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär. Ferner ist, bei jedem $\varepsilon > 0$, die Funktion $\frac{1}{f(s) - a}$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$ (also a fortiori, bei jedem $0 < \varepsilon < 1$, im Streifen $\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$) beschränkt; denn es ist für $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$

$$|f(s) - a| \geq |a| - |f(s)| \geq |a| - R(\sigma) > R(\sigma_0) - R(\sigma_0 + \varepsilon).$$

Es ist dagegen $\frac{1}{f(s) - a}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt, denn es gehört ja nach § 1, wegen $R(\sigma_0) = |a|$, der Wert a dem Gebiete $G = G(\sigma_0)$ an, so dass $f(\sigma_0 + it)$ ($-\infty < t < \infty$) beliebig nahe an a herankommt.

Fall 2. $a = 0$.

Da, für alle $\sigma > B$, $R = R(\sigma)$ positiv ist, ist in diesem Falle für kein $\sigma > B$, $R(\sigma) = |a|$, und es muss daher die im Falle 1 verwendete Beweismethode hier etwas geändert werden. Es sei, für jedes $\sigma > B$,

$$r_1 = r_1(\sigma) = |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

gesetzt; die hier für $\sigma > B$ definierte Funktion $r_1(\sigma)$ ist dann eine stetige Funktion, die bekanntlich für alle hinreichend grosse σ positiv ist, und es ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow B} r_1(\sigma) = -\infty.$$

Es folgt hieraus die Existenz einer reellen Zahl $\sigma_0 > B$ derart, dass

$$r_1(\sigma_0) = 0$$

ist, während, für $\sigma > \sigma_0$,

$$r_1(\sigma) > 0$$

ist. Dann ist für $\sigma > \sigma_0$

$$|f(s)| \geq |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma} - \sum_{n=2}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = r_1(\sigma) > 0,$$

also die Funktion $\frac{1}{f(s) - 0} = \frac{1}{f(s)}$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär; ferner ist, für jedes $0 < \varepsilon < 1$,

die Funktion $\frac{1}{f(s)}$ im Streifen $\sigma_0 + \varepsilon < \sigma < \sigma_0 + 1$ (nicht aber in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$) beschränkt; denn es ist in diesem Streifen

$$|f(s)| \geq r_1(\sigma) \geq m > 0,$$

wo $m = m(\varepsilon)$ das Minimum der stetigen Funktion $r_1(\sigma)$ im Intervall $\sigma_0 + \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$ bedeutet, in welchem Intervall $r_1(\sigma) > 0$ ist. Dagegen ist die Funktion $\frac{1}{f(s)}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ nicht beschränkt; es ist nämlich, wegen

$$r_1(\sigma_0) = |a_1| e^{-\lambda_1 \sigma_0} - \sum_{n=2}^{\sigma_0} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0} = 0,$$

in der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$$

kein Glied grösser als die Summe aller übrigen Glieder, so dass 0 dem Gebiete

$G(\sigma_0)$ angehört, und es nimmt somit die Funktion $f(\sigma_0 + it)$ ($-\infty < t < \infty$) beliebig kleine Werte an.

Es ist hiermit der Hilfssatz 3 bewiesen.

Ich gehe nunmehr zum **Beweise des Satzes 4^a** über.

Es sei a eine beliebige komplexe Zahl, dann ist zu beweisen: es nimmt die Funktion $f(s)$ für $\sigma > B$ den Wert a an. Es habe $\sigma_n = \sigma_0(a)$ die Bedeutung des Hilfssatzes 3, also insbesondere: es ist $f(s) \neq a$ für $\sigma > \sigma_0$. Ich werde dann beweisen: es nimmt, sogar bei jedem $\varepsilon > 0$, die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geq \sigma_0 - \varepsilon$ den Wert a an. Gesetzt, dies sei nicht der Fall, dann gäbe es eine feste Zahl $e > 0$, die ich $< \sigma_0 - B$ sowie $< \frac{1}{3}$ annehmen darf, derart, dass $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geq \sigma_0 - e$ verschieden von a wäre. Es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $\sigma \geq \sigma_0 - e$ regulären Zweig der Funktion

$$\log (f(s) - a).$$

Dann ist, im Streifen $\sigma_0 - e \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$, $\Re(F(s))$ ¹ nach oben beschränkt, denn es ist in diesem Streifen

$$\Re(F(s)) = \Re(\log (f(s) - a)) = \log |f(s) - a| \leq \log \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\sigma_0 - e)} + |a| \right) < K_1,$$

wo die positive Grösse K_1 (sowie in der Folge $K_2 > 0$, $K_3 > 0, \dots$) von s nicht abhängt.

Ferner ist, auf der Geraden $\sigma = \sigma_0 + e$, $\Re(F(s))$ auch nach unten beschränkt, d. h. es ist für $\sigma = \sigma_0 + e$

$$-\Re(F(s)) \leq K_2,$$

denn es ist

$$-\Re(F(s)) = \log \left| \frac{1}{f(s) - a} \right|$$

und, nach dem Hilfssatze 3, die Funktion $\frac{1}{f(s) - a}$ für $\sigma = \sigma_0 + e$ beschränkt.

Nun hat aber Herr CARATHÉODORY bewiesen:

Es sei die analytische Funktion $F(s)$ für $|s - s_0| \leq r$ regulär und A das Maximum von $\Re(F(s))$ für $|s - s_0| \leq r$. Es sei $0 < \varrho < r$. Dann ist für $|s - s_0| \leq \varrho$

¹ $\Re(z)$ bedeute stets den reellen Teil einer komplexen Zahl z .

$$|\Re(F(s))| \leq |\Re(F(s_0))| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A \frac{\varrho}{r-\varrho}.$$

Wir wenden nun diesen CARATHÉODORY'schen Satz an auf die Funktion

$$F(s) = \log(f(s) - a),$$

den Punkt

$$s_0 = \sigma_0 + e + it \quad (-\infty < t < \infty)$$

und die Zahlen

$$r = 2e, \quad \varrho = e.$$

Die Voraussetzungen des Satzes (d. h. insbesondere die Regularität von $F(s)$ für $|s - s_0| \leq r$) sind offenbar erfüllt; denn es gehört ja der Kreis $|s - s_0| \leq r$ dem Streifen $\sigma_0 - e \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$ an.

Ferner ist im Streifen $\sigma_0 - e \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$, also a fortiori im Kreise $|s - s_0| \leq r$,

$$\Re(F(s)) < K_1,$$

d. h. es ist die Zahl $A < K_1$, und aus

$$\Re(F(s_0)) < K_1, \quad -\Re(F(s_0)) < K_2$$

folgt

$$|\Re(F(s_0))| < K_3,$$

wo K_3 die grössere der beiden positiven Zahlen K_1 und K_2 bedeutet.

Der CARATHÉODORY'sche Satz ergibt alsdann für $|s - s_0| \leq \varrho = e$

$$|\Re(F(s))| < K_3 \frac{2e+e}{2e-e} + 2K_1 \frac{e}{2e-e} = 3K_3 + 2K_1 = K_4.$$

Es wäre also insbesondere im Punkte $s = \sigma_0 + it$, der vom Punkte s_0 genau den Abstand $\varrho = e$ hat,

$$|\Re(F(s))| < K_4,$$

also a fortiori

$$-\Re(F(\sigma_0 + it)) < K_4. \quad (-\infty < t < \infty)$$

Die Funktion

$$\left| \frac{1}{f(s) - a} \right| = e^{-\Re(F(s))}$$

wäre also auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ beschränkt, im Gegensatze zu den Voraussetzungen.

Es muss also unsre Annahme $f(s) \neq a$ für $\sigma \geq \sigma_0 - e$ falsch gewesen sein.

Damit ist der Satz 4^a bewiesen.

Dem Satze 4^a schliesst sich der folgende Satz 4^b an, der den Fall behandelt, in dem die Reihe (1) auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergiert.

Satz 4^b. *Es sei die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge für $\sigma \geq B$ absolut konvergent, für $\sigma < B$ dagegen nicht absolut konvergent, und es sei $a_1 \neq 0$. Dann liegen die Werte, welche $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ annimmt, sämtlich im Innern (excl. Rand) des Kreises $|z| \leq R$, wo*

$$R = R(B) = \sum_{n=1}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

ist; und es nimmt die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert im Innern des Kreises $|z| \leq R$, bzw. jeden Wert im Innern des Kreises $|z| \leq R$ ausser den einzigen Wert 0, an, je nachdem

$$|a_1 e^{-\lambda_1 B}| < \sum_{n=2}^{\sigma} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

bzw.

$$|a_1 e^{-\lambda_1 B}| > \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n B}$$

ist.

Die Ausführung des Beweises dieses Satzes überlasse ich dem Leser, da er im Wesentlichen ganz wie der des Satzes 4^a verläuft.

Die beiden Sätze 4^a und 4^b behandelten den Fall, dass die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1) im Endlichen gelegen war. Es sei nunmehr derjenige Fall betrachtet, in dem die Reihe (1) überall absolut konvergiert. Hier gilt der folgende

Satz 4^c. *Es möge die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge in der ganzen Ebene absolut konvergieren, und es mögen mindestens zwei der Koeffizienten der Reihe von 0 verschieden sein.¹ Dann nimmt die in der ganzen Ebene reguläre Funktion $f(s)$ jeden Wert an.*

¹ Wenn die Koeffizienten der Reihe (1) sämtlich gleich 0 sind, nimmt die Funktion $f(s)$ nur den Wert 0 an; wenn nur ein Koeffizient $\neq 0$ ist, nimmt $f(s)$ jeden Wert ausser 0 an.

Der Beweis dieses Satzes verläuft wörtlich wie der Beweis des Satzes 4^a, wenn nur in dem letzten B überall durch $-\infty$ ersetzt wird.

Schliesslich will ich noch erwähnen, dass ich durch eine tiefergehende Untersuchung, auf die ich hier verzichte, das folgende allgemeine Resultat bewiesen habe, aus welchem offenbar die obigen Sätze 4^a, 4^b und 4^c speziell abzuleiten sind: *Es ist die Menge $M(\sigma_0)$ aller Werte, welche die Dirichletsche Reihe (I) mit linear unabhängiger Exponentenfolge in unendlicher Nähe¹ der im Innern des absoluten Konvergenzgebietes gelegenen vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, mit der Menge aller Zahlen, welche in der komplexen Ebene im Gebiete $G(\sigma_0)$ (d. h. im Kreissegmente $r \leq |z| \leq R$, bzw. im Kreise $|z| \leq R$) gelegen sind, identisch.*

§ 4.

Satz 5. *Es besitze die zur linear unabhängigen Exponentenfolge (2) gehörige Dirichletsche Reihe (I) ein absolutes Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geq \beta$ regulär und beschränkt sein. Dann ist die Reihe (I) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.*

Beweis: Es ist nach Voraussetzung eine reelle Zahl α derart vorhanden, dass (I) für $\sigma > \alpha$ absolut konvergiert; da für $\beta \geq \alpha$ der Satz trivial ist, darf beim Beweise $\beta < \alpha$ angenommen werden.

Es ist ferner nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ für $\sigma \geq \beta$ beschränkt, d. h. es gibt eine positive Zahl K derart, dass für $\sigma \geq \beta$

$$|f(s)| < K$$

ist.

Es sei nunmehr $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann lautet die Behauptung: es ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta + \delta)}$$

konvergent. Es darf hierbei offenbar $\delta < 1$ angenommen werden.

In der Umgebung von $s = \alpha + 1 + iT$, wo T eine beliebige reelle Zahl bedeutet, mit einem Radius $r = r(T) > \alpha + 1 - \beta$ gilt die Potenzreihenentwicklung

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s - (\alpha + 1 + iT))^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\alpha + 1 + iT);$$

¹ Unter dem Ausdruck: es nimmt die Funktion $f(s)$ den Wert z in unendlicher Nähe der Geraden $\sigma = \sigma_0$ an, ist zu verstehen: Bei jedem $\delta > 0$ nimmt die Funktion $f(s)$ im Streifen $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ den Wert z an.

denn es ist ja nach Voraussetzung die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geq \beta$ regulär.

Weil aber nach Voraussetzung, für $|s - (\alpha + 1 + iT)| \leq \alpha + 1 - \beta$,

$$|f(s)| < K$$

ist, so ergibt sich die Existenz einer Konstanten (d. h. einer von T unabhängigen Grösse) $K_1 = K_1(\alpha, \beta, \delta, K)$ derart, dass, für $|s - (\alpha + 1 + iT)| \leq \alpha + 1 - \beta - \delta$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(s - (\alpha + 1 + iT))^m}{m!} \cdot f^{(m)}(\alpha + 1 + iT) \right| < K_1$$

ist.¹

Hieraus folgt speziell im Punkte $s = \beta + \delta + iT$, der vom Punkte $\alpha + 1 + iT$ genau den Abstand $\alpha + 1 - \beta - \delta$ hat, die Ungleichung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} (-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + iT) \right| < K_1 \quad (9)$$

d. h., wenn ich für alle $m = 0, 1, 2, \dots$

$$(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + iT) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1+iT)}$$

einführe,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1+iT)} \right| < K_1.$$

Ich werde nunmehr zeigen, und dieser Nachweis ist der Kern des Beweises, dass man aus der für alle reellen T giltigen Ungleichung (9) die Konvergenz der Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)}$$

folgern kann, ja sogar beweisen kann: es ist

¹ Es ist hier der folgende Satz angewendet: »Es sei $0 < r_1 < r_2$, und die durch die Potenzreihe $\sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m$ dargestellte Funktion $F(x)$ für $|x| \leq r_2$ regulär, sowie, für $|x| \leq r_2$, $|F(x)| < k$;

dann gibt es eine Konstante $k_1 = k_1(r_1, r_2, k)$ derart, dass für $|x| \leq r_1$, $\sum_{m=0}^{\infty} |A_m x^m| < k_1$ ist.»

Die Richtigkeit dieses Satzes ist unmittelbar einzusehen. Aus $|F(x)| < k$ für $|x| \leq r_2$ folgt nämlich für alle $m = 0, 1, 2, \dots$ die Abschätzung $|A_m| < k : r_2^m$, und hieraus ergibt sich weiter für $|x| \leq r_1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |A_m x^m| < k \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^m = k \frac{r_2}{r_2 - r_1} = k_1 \quad \text{q. e. d.}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \leq K_1,$$

wo K_1 die obige Konstante bedeutet.

Gesetzt, dies sei nicht der Fall, dann würde ein ganzzahliges M derart existieren, dass

$$\sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} = K_2 > K_1$$

wäre. Hieraus ergibt sich aber ein Widerspruch in folgender Weise.

Es sei

$$\varepsilon = \frac{K_2 - K_1}{\sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!}}$$

gesetzt, und zu diesem ε , was nach dem Satze 2° (vergl. Korollar dieses Satzes) möglich ist, die reelle Zahl t_0 so gewählt, dass für alle $m = 0, 1, 2, \dots, M$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} - |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| < \varepsilon$$

ist. Dann ergibt sich für dieses t_0

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| &= \sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \\ &\quad - \sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)} - |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| \right) \\ &> K_2 - \varepsilon \sum_{m=0}^M \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} = K_2 - (K_2 - K_1) = K_1 \end{aligned}$$

also a fortiori

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} |(-1)^m f^{(m)}(\alpha + 1 + it_0)| > K_1,$$

im Gegensatz zu der für alle reellen T giltigen Beziehung (9).

Aus der somit bewiesenen Konvergenz der Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1 - \beta - \delta)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \lambda_n^m e^{-\lambda_n(\alpha+1)}$$

folgt nunmehr die Konvergenz der durch Summationsvertauschung entstehenden Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1-\beta-\delta)^m}{m!} \lambda_n^m$$

d. h. die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\alpha+1)} \cdot e^{\lambda_n(\alpha+1-\beta-\delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)}.$$

Damit ist der Satz V bewiesen.¹

§ 5.

Es ist in dem vorangehenden Paragraph bewiesen: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein absolutes Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion für $\sigma \geq \beta$ regulär und beschränkt sein; dann ist die Reihe (1) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.

Ich werde nunmehr im folgenden Paragraph, d. h. im § 6, beweisen, dass in dem obigen Satze die Voraussetzung der Existenz einer absoluten Konvergenzhalbebene glatt weggelassen werden kann, oder vielmehr durch die (wie es in der Natur der Sache liegt, notwendige) Voraussetzung ersetzt werden kann: es besitze die Reihe (1) überhaupt ein Konvergenzgebiet.

Wie der Leser bemerkt haben wird, stützte sich die Beweismethode des § 4 wesentlich auf die dort vorausgesetzte Existenz eines absoluten Konvergenzgebietes. Ich wende daher im § 6 eine ganz andere Beweismethode an, die übrigens keinen Gebrauch von dem im § 4 gewonnenen Resultate macht.

In diesem Paragraph 5 erinnere ich an einen für den Beweis des Satzes in § 6 wesentlichen Hilfssatz des Herrn PERRON.

¹ Die oben verwendete Beweismethode, nämlich von der TAYLOR'schen Reihenentwicklung der durch die Dirichletsche Reihe dargestellten Funktion auszugehen und dann nachher durch Summationsvertauschung einer Doppelreihe zu der Dirichletschen Reihe zurückzukehren, ist zuerst von Herrn LANDAU benutzt, der sie verwendet um den folgenden Satz über Dirichletsche Reihen mit *positiven* Koeffizienten zu beweisen: »Es habe die Dirichletsche Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, wo stets $a_n \geq 0$ ist, die im Endlichen gelegene Konvergenzgerade $\sigma = A$. Dann ist $s = A$ ein singulärer Punkt der für $\sigma > A$ durch die Reihe definierten Funktion $f(s)$.» Beim Beweise des LANDAU'schen Satzes war die Erlaubnis der Summationsvertauschung der dort vorkommenden Doppelreihe von vornherein klar, weil ihre Elemente sämtlich ≥ 0 waren. Beim obigen Beweise des Textes dagegen, war es gerade die wesentlichste, und erst durch Heranziehen des recht tief liegenden Satzes 1 zu überwindende Schwierigkeit, die Erlaubnis dieser Summationsvertauschung der Doppelreihe zu beweisen.

Es ist bekanntlich, und mit Hilfe des CAUCHY'schen Integralsatzes sehr leicht zu beweisen, für $\gamma > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{ys}}{s^2} ds = \begin{cases} y & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y \leq 0, \end{cases}$$

wo das Integral rechts längs der vertikalen Geraden $\sigma = \gamma$ von $\gamma - i\infty$ bis $\gamma + i\infty$ erstreckt ist.

Herr PERRON hat, von dieser Formel ausgehend, bewiesen: Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei die Gerade $\sigma = \gamma$, wo $\gamma > 0$ ist, im Innern des Konvergenzgebietes gelegen; es sei ferner x eine beliebige reelle Zahl; dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{xs}}{s^2} f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(x-\lambda_n)s} ds = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n).$$

Durch Anwendung einer einfachen Variablentransformation $s = s' - s_0$ lässt sich dieser PERRON'sche Satz auch so formulieren:

Hilfssatz 4: *Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) ein Konvergenzgebiet, und es sei $\sigma = \gamma$ im Innern dieses Konvergenzgebietes gelegen; es sei ferner s_0 eine komplexe Zahl, für die $\Re(s_0) < \gamma$ ist, und es sei x eine reelle Zahl. Dann ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2} f(s) ds = \sum_{\lambda_n < x} (x - \lambda_n) a_n e^{-\lambda_n s_0}$$

§ 6.

Satz 6: *Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet, und es möge die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma \geq \beta$ regulär und beschränkt sein. Dann ist (1) für $\sigma > \beta$ absolut konvergent.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante K derart, dass für $\sigma \geq \beta$

$$|f(s)| < K$$

ist.

Es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann ist zu beweisen: Die Reihe (1) ist für $\sigma = \beta + \delta$ absolut konvergent.

Ich bemerke zunächst, dass die Funktion $f'(s)$ auf der Geraden $\sigma = \beta + \delta$ beschränkt ist; denn es ist nach dem CAUCHY'schen Satze, für jedes reelle t ,

$$f'(\beta + \delta + it) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - (\beta + \delta + it))^2} ds$$

wo das Integral rechts längs der Kreisperipherie C mit dem Mittelpunkte $\beta + \delta + it$ und dem Radius δ erstreckt ist; und hieraus ergibt sich sofort

$$|f'(\beta + \delta + it)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K}{\delta^2} \delta d\theta = \frac{K}{\delta} = K',$$

wo K' von t nicht abhängt.

Es sei nunmehr $\gamma > \beta + \delta$ eine reelle Zahl, die im Inneren des Konvergenzgebietes der Reihe (1) gelegen ist. Es sei T eine beliebige reelle Zahl, und es sei $s_0 = \beta + \delta + iT$ gesetzt. Es sei ferner $x > 1$ eine feste positive Zahl. Dann ist nach dem Hilfsatz 4 des § 5

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2} f(s) ds = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n s_0}, \quad (10)$$

wo das Integral links längs der Geraden $\sigma = \gamma$ erstreckt ist.

Wir wenden nunmehr den CAUCHY'schen Satz auf den Integranden

$$F(s) = \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2} f(s)$$

und das Rechteck

$$[\gamma - iU, \gamma + iV, \beta + iV, \beta - iU]$$

an. Dann ergibt sich für alle hinreichend grosse U und V

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iU}^{\gamma + iV} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iU}^{\beta - iU} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - iU}^{\beta + iV} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta + iV}^{\gamma + iV} F(s) ds + x f(s_0) + f'(s_0); \quad (11)$$

denn es ist die Funktion

$$F(s) = \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2} f(s)$$

im Rechteck und auf dessen Begrenzung überall regulär bis auf den einzigen Punkt $s = s_0$, wo sie einen Pol der zweiten Ordnung mit dem Residuum $xf(s_0) + f'(s_0)$ besitzt.¹

Lassen wir nunmehr in (11) U und V gegen ∞ wachsen! Dann konvergiert das erste und dritte Integral rechts gegen 0; denn es ist auf den beiden Strecken $(\gamma - iU, \beta - iU)$ und $(\beta + iV, \gamma + iV)$

$$|F(s)| = |F(\sigma + it)| = \left| \frac{e^{x(s-s_0)}}{(s-s_0)^2} f(s) \right| < \frac{e^{x(\gamma-(\beta+\delta))}}{(t-T)^2} K = \frac{k}{(t-T)^2}$$

wo k von t , d. h. von U und V , nicht abhängt.

Ferner konvergiert, nach (10), die linke Seite von (11) gegen

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n s_0}.$$

Es folgt daher aus (11)

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n s_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) ds + xf(s_0) + f'(s_0). \quad (12)$$

Untersuchen wir zunächst das erste Glied auf der rechten Seite von (12), und setzen wir die Variable s gleich $\beta + it$, wo die reelle Variable t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(\beta+it-(\beta+\delta+iT))}}{(\beta+it-(\beta+\delta+iT))^2} f(\beta+it) i dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(-\delta+i(t-T))}}{(-\delta+i(t-T))^2} f(\beta+it) dt, \end{aligned}$$

also

¹ Die Formel (11) gilt, wie unmittelbar zu ersehen, auch in den beiden speziellen Fällen $f(s_0) = 0, f'(s_0) \neq 0$, bzw. $f(s_0) = 0, f'(s_0) = 0$, wo die Funktion $F(s)$ im Punkte s_0 einen Pol der ersten Ordnung, bzw. eine reguläre Stelle besitzt.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s) ds \right| < \frac{1}{2\pi} e^{-x\delta} K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\delta^2 + (t-T)^2} = \frac{K}{2\pi} e^{-x\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\delta^2 + u^2} = K_1 e^{-x\delta} < K_1,$$

wo $K_1 > 0$ (sowie in der Folge K_2, K_3, K_4, \dots) von T und $x (> 1)$ unabhängig ist.

Ferner ist

$$|x f(s_0) + f'(s_0)| < xK + K' < x(K + K') < xK_2.$$

Es ergibt sich daher aus (12)

$$\left| \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n s_0} (x - \lambda_n) \right| < K_1 + xK_2 < xK_3.$$

Es ist somit für alle reellen T bewiesen, dass

$$\left| \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n(\beta + \delta + iT)} \right| < xK_3 \quad (13)$$

ist, wo K_3 von T und $x (> 1)$ nicht abhängt.

Wir wählen nunmehr, bei festem $x > 1$, ein reelles t_0 derart, dass

$$\sum_{\lambda_n < x} |a_n| (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n(\beta + \delta)} - \left| \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n(\beta + \delta + it_0)} \right| < 1 \quad (14)$$

ist. Eine solche Wahl ist nach dem Satze 2^b des § 2 möglich; man hat ihr nur auf die für $\sigma = \beta + \delta$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

anzuwenden, wo

$$b_n = \begin{cases} a_n (x - \lambda_n) & \text{für } \lambda_n < x \\ 0 & \text{für } \lambda_n \geq x \end{cases}$$

ist.

Aus (13) und (14), wenn in der ersten Ungleichung T speziell gleich t_0 gesetzt wird, ergibt sich nun weiter

$$\sum_{\lambda_n < x} |a_n| (x - \lambda_n) e^{-\lambda_n(\beta + \delta)} < xK_3 + 1 < x(K_3 + 1) < xK_4,$$

also a fortiori

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} (x - \lambda_n) < x K_4,$$

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} \left(\frac{x}{2}\right) < x K_4$$

$$\frac{x}{2} \sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} < x K_4$$

d. h.

$$\sum_{\lambda_n < \frac{x}{2}} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)} < 2 K_4 = K_5,$$

wo K_5 von x unabhängig ist. Dies gilt für jedes $x > 1$. Es ist folglich die Reihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\beta+\delta)}$$

konvergent. Damit ist der Satz 6 bewiesen.

Es lässt sich nunmehr der Beweis des in der Einleitung erwähnten Hauptsatzes in wenigen Worten führen.

Hauptsatz: *Es besitze die Dirichletsche Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet. Dann ist es eine für die absolute Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma \geq \beta$ notwendige und hinreichende Bedingung, dass die durch die Reihe definierte Funktion $f(s)$ für $\sigma > \beta$ regulär und beschränkt ist.*

Beweis. 1.) Die Bedingung ist notwendig; denn aus der absoluten Konvergenz der Reihe (1) für $\sigma \geq \beta$ folgt erstens die Regularität von $f(s)$ für $\sigma > \beta$; ferner ist, der für $\sigma > \beta$ giltigen Ungleichung

$$|f(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

zufolge, $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \beta$ beschränkt.

2.) Die Bedingung ist aber auch hinreichend; denn es sei $f(s)$ für $\sigma > \beta$, also a fortiori, bei jedem $\varepsilon > 0$, für $\sigma \geq \beta + \varepsilon$, regulär und beschränkt; dann ist, nach dem Satze 6, die Dirichletsche Reihe (1) für $\sigma > \beta + \varepsilon$, d. h. für $\sigma > \beta$,

absolut konvergent. Es ist aber die Reihe (1) auch für $\sigma = \beta$ absolut konvergent, denn wenn dies nicht der Fall wäre, dann würde nach dem Satze 3 des § 2 folgen: »es ist $f(s)$ für $\sigma > \beta$ nicht beschränkt,» im Gegensatze zu den Voraussetzungen.

Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Wie unmittelbar einzusehen, lässt sich der Hauptsatz auch folgendermassen formulieren:

Es besitze die Reihe (1) mit linear unabhängiger Exponentenfolge ein Konvergenzgebiet; dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Es sei für kein reelles σ_0 die Funktion $f(s)$ für $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe (1) nirgends absolut konvergent.

Fall 2. Es sei für jedes reelle σ_0 die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt; dann ist die Reihe (1) überall absolut konvergent.

Fall 3. Es mögen zwei Zahlen σ_1 und σ_2 derart existieren, dass $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_1$ regulär und beschränkt ist, dagegen in der Halbebene $\sigma > \sigma_2$ nicht sowohl regulär als auch beschränkt ist, und es bezeichne unter dieser Annahme B diejenige reelle Zahl, für welche, bei jedem $\varepsilon > 0$, $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > B + \varepsilon$ regulär und beschränkt ist, dagegen in der Halbebene $\sigma > B - \varepsilon$ nicht regulär und beschränkt ist. Dann ist B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1). Ferner ist (1) auf der absoluten Konvergenzgeraden $\sigma = B$ absolut konvergent oder nicht, je nachdem $f(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > B$ (nicht etwa in der Halbebene $\sigma > B + \varepsilon$) beschränkt ist oder nicht.

In nicht ganz präziser Ausdrucksweise lässt sich der Hauptsatz auch so formulieren: Eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge ist stets so weit und nur so weit absolut konvergent, als die durch die Reihe dargestellte Funktion regulär und beschränkt bleibt.

§ 7.

In dem Hauptsatze, sowie in allen Sätzen der Paragraphen 1, 2, 3, 4 und 6, ist die Exponentenfolge der (und nur der) Bedingung unterworfen, dass ihre Elemente linear unabhängig sein sollen. Diese Bedingung wurde in § 1 eingeführt, um den KRONECKER'schen Satz über Diophantische Approximationen auf unseren Problemkreis verwenden zu können. Die Einführung jenes KRONECKER'schen Satzes gestattete uns in § 1 den Satz 1 zu beweisen, welcher letzte Satz gewissermassen die Grundlage der in dieser Abhandlung dargestellten Theorie bildet. Es fragt sich aber nunmehr, ob diese arithmetische Bedingung, welche

der Exponentenfolge auferlegt ist, nur für die von uns verwendete Beweismethode notwendig ist, oder aber ob sie eine für die Sätze selbst (in erster Linie für den Hauptsatz) wesentliche Bedingung ist, d. h. ob die Sätze noch bestehen bleiben, wenn in denselben die einschränkende Bedingung für die Exponentenfolge weggelassen wird.

Ich werde nunmehr in diesem letzten Paragraph beweisen, dass dies letzte nicht der Fall ist, d. h. dass die arithmetische Bedingung der Exponentenfolge in der Tat eine für die Probleme selbst wesentliche Bedingung ist. Der Kürze halber werde ich mich nur mit dem Hauptsatze sowie mit dem Satze 4^a des § 3 beschäftigen.

Es sei zunächst der Satz 4^a ins Auge gefasst.

Dieser Satz sagt aus: Es nimmt eine Dirichletsche Reihe mit linear unabhängiger Exponentenfolge, die für $\sigma > B$ absolut konvergiert, für $\sigma = B$ dagegen nicht absolut konvergiert, in der Halbebene $\sigma > B$ jeden Wert an.

Dass dieser Satz nicht allgemein besteht, wenn die arithmetische Bedingung für die Exponentenfolge weggelassen wird, folgt unmittelbar durch Betrachtung der folgenden speziellen, zur linear nicht unabhängigen Exponentenfolge $\lambda_n = n$ gehörigen, für $\sigma > 0$ absolut konvergenten, für $\sigma = 0$ dagegen nicht absolut konvergenten Dirichletschen Reihe

$$\frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n s}.$$

Es nimmt ja die Funktion $\frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}}$ in der Halbebene $\sigma > 0$ z. B. keinen Wert im

Kreise $|z + 1| < \frac{1}{2}$ an; denn es ist für $\sigma > 0$, d. h. für $|e^{-s}| < 1$,

$$\left| \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} + 1 \right| = \left| \frac{1}{1 - e^{-s}} \right| > \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Ein anderes Beispiel bildet die zur linear nicht unabhängigen Exponentenfolge $\lambda_n = \log n$ gehörige Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\log n \cdot s},$$

wo $\zeta(s)$ die RIEMANN'sche Zetafunktion bedeutet; es ist nämlich $\sum \frac{1}{n^s}$ für $\sigma > 1$ absolut konvergent, dagegen für $\sigma = 1$ nicht absolut konvergent, während bekanntlich für $\sigma > 1$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist.¹

Wir wenden uns nunmehr zum Hauptsatze.

Es handelt sich hier vor allem darum, die Existenz einer solchen Dirichletschen Reihe (die selbstverständlich zu einer linear nicht unabhängigen Exponentenfolge gehören muss) zu beweisen, dass die durch die Reihe definierte Funktion für $\sigma > 0$ ² regulär und beschränkt ist, ohne dass die Reihe jedoch für $\sigma \geq 0$ absolut konvergiert.

Zu diesem Zwecke entnehme ich aus der Theorie der Potenzreihen den folgenden

Existenzsatz 1: *Es existiert eine für $|x| < 1$ absolut konvergente, für $|x| = 1$ nicht absolut konvergente, Potenzreihe*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

derart, dass die Funktion $F(x)$ im Innern des Einheitskreises beschränkt ist, d. h. derart, dass es eine solche Konstante K gibt, dass, für $|x| < 1$,

$$|F(x)| < K$$

ist.

Ich betrachte nunmehr die für $|e^{-s}| < 1$, d. h. für $\sigma > 0$, absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{-s})^n = F(e^{-s}),$$

wo die Grössen b_n die Koeffizienten der im obigen Existenzsatze vorkommen-

¹ Dagegen nimmt, wie ich vor kurzem bewiesen habe (Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, Göttinger Nachrichten, 1911), die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert ausser den einzigen Wert 0 an. Da hier von der Zetafunktion die Rede ist, bemerke ich beiläufig, dass aus dem Satze 4^a des § 3 unmittelbar folgt, dass die beiden Dirichletschen Reihen

$$\sum \frac{1}{p^s} \text{ und } \sum \frac{\log p}{p^s}, \quad (p = 2, 3, 5, 7, \dots),$$

welche mit der Zetafunktion in naher Verbindung steht, in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert annimmt; denn es ist die Exponentenfolge $\log p$ linear unabhängig, und es sind die beiden obigen Reihen für $\sigma > 1$ absolut konvergent, für $\sigma = 1$ dagegen nicht absolut konvergent.

² An Stelle von 0 könnte natürlich hier und im folgenden jede andere reelle Zahl stehen.

den Potenzreihe sind. Die durch diese Dirichletsche Reihe definierte Funktion $f(s) = F(e^{-s})$ ist alsdann, dem Existenzsatze zufolge, für $|e^{-s}| < 1$, d. h. für $\sigma > 0$, regulär und beschränkt; es ist aber die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

für $\sigma \geq 0$ doch nicht absolut konvergent (sondern nur für $\sigma > 0$); denn es ist, für $\sigma = 0$, die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n \cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

divergent.

Es ist durch dieses Beispiel gezeigt, dass in dem Hauptsatze die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Exponentenfolge nicht weggelassen werden kann. Es fragt sich aber weiter, und dies ist durch das Vorhergehende noch nicht erledigt, ob nicht doch für alle (d. h. zu einer beliebigen, linear unabhängigen oder nicht unabhängigen Exponentenfolge gehörigen) Dirichletschen Reihen, die ein Konvergenzgebiet besitzen, aus der vorausgesetzten Regularität und Beschränktheit für $\sigma > \sigma_0$ der durch die Reihe definierten Funktion, die absolute Konvergenz der Reihe wenigstens für $\sigma > \sigma_0$ folgt. (Es ist durch das obige Beispiel nur bewiesen: es folgt nicht die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma \geq \sigma_0$).

Dass dies aber nicht der Fall ist, werde ich nunmehr durch den folgenden Satz beweisen.

Satz A: *Es existiert, zu jedem $k > 0$, eine Dirichletsche Reihe mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

- 1.) *Die Reihe ist für $\sigma > k$ absolut konvergent, für $\sigma = k$ dagegen nicht absolut konvergent.*
- 2.) *Die durch die Reihe definierte Funktion ist für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt.¹*

Dem Beweis dieses Satzes wird der folgende sehr leicht beweisbare Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz: *Es sei auf der reellen Achse eine abzählbare Menge von Intervallen $i_1, i_2, \dots, i_m, \dots$ beliebig gegeben. Dann existiert eine reelle Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ derart, dass erstens, für alle $m = 1, 2, \dots$, die Zahl δ_m dem Intervalle i_m zugehört, und dass zweitens, für kein ganzzahliges positives M , eine Relation der Form*

¹ Es kann natürlich, dem Hauptsatze zufolge, die Exponentenfolge der Reihe hierbei linear nicht unabhängig sein.

$$g_0 + g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 + \cdots + g_M \delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen g_0, g_1, \dots, g_M besteht.

Beweis: Ich wähle zunächst δ_1 im Intervalle i_1 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 = 0$$

besteht, d. h. ich wähle eine irrationale Zahl δ_1 im Intervalle i_1 . Nachdem δ_1 festgelegt ist, wähle ich nunmehr eine Zahl δ_2 im Intervalle i_2 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 = 0$$

besteht. Eine solche Wahl ist offenbar möglich, denn die sämtlichen Zahlen δ'_2 , die eine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + g_2 \delta'_2 = 0$$

(wobei eo ipso $g_2 \neq 0$ sein muss) genügen, d. h. die Zahlen δ'_2 der Form

$$\delta'_2 = r_0 + r_1 \delta_1,$$

wo r_0 und r_1 zwei rationale Zahlen bedeuten, bilden bekanntlich eine abzählbare Menge, während ja die sämtlichen Zahlen im Intervalle i_2 eine unendliche nicht abzählbare Menge bilden. Wir setzen nunmehr die obige Methode fort, bestimmen, nachdem δ_1 und δ_2 festgelegt sind, eine Zahl δ_3 im Intervalle i_3 derart, dass keine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 + g_3 \delta_3 = 0$$

besteht, u. s. w.

Die Möglichkeit dieser sukzessiven Bestimmungen ergibt sich unmittelbar durch Induktion, wenn man sich daran erinnert, dass bei jedem festen m , die Zahlen der Form

$$\delta'_m = r_0 + r_1 \delta_1 + \cdots + r_{m-1} \delta_{m-1},$$

wo $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m-1}$ feste Zahlen sind, während r_0, r_1, \dots, r_{m-1} beliebige rationale Zahlen bedeuten, eine abzählbare Menge bilden.

Die somit erhaltene unendliche Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ erfüllt offenbar die Bedingungen des Hilfssatzes; damit ist dieser Satz bewiesen.

Wir gehen nunmehr zum **Beweise des Satzes A** über.

Es sei also die Zahl $k > 0$ gegeben.

Es habe

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

die Bedeutung des obigen Existenzsatzes I, und es sei wie vorher

$$f(s) = F(e^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

gesetzt. Dann ist die zur Exponentenfolge $\lambda_n = n$ gehörige Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

für $\sigma > 0$ absolut konvergent, für $\sigma = 0$ dagegen nicht absolut konvergent.

Aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

folgt bekanntlich für zu 0 abnehmendes σ

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\sigma} = \infty;$$

ferner ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\sigma} = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Existenz einer unendlichen Folge von positiven, d. h. auf dem positiven Teil der reellen Achse gelegenen, Intervallen $i_1, i_2, \dots, i_m, \dots$ derart, dass für jede Zahl y , die dem Intervall i_m angehört,

$$e^{(1+k)m} < \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-nky} < 2 e^{(1+k)m}$$

ist.

Es sei nunmehr, was nach dem obigen Hilfssatze möglich ist, die reelle Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ so gewählt, dass, für alle $m = 1, 2, \dots$, die Zahl δ_m dem Intervalle i_m angehört, während für kein M eine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + \dots + g_M \delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen g_0, g_1, \dots, g_M besteht. Dann ist für alle $m = 1, 2, \dots$

$$e^{(1+k)m} < \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot k} < 2 e^{(1+k)m},$$

und es erfüllen die positiven Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ hierbei eo ipso die Bedingung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = 0.$$

Es sei nunmehr, für alle $m = 1, 2, 3, \dots$

$$f_m(s) = f(s \delta_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \delta_m s}$$

gesetzt. Es gehört also die für $\sigma \delta_m > 0$, d. h. für $\sigma > 0$, absolut konvergente Dirichletsche Reihe $f_m(s)$ zur linear nicht unabhängigen Exponentenfolge $\delta_m, 2\delta_m, 3\delta_m, \dots$. Hierbei ist, für $\sigma > 0$, $f_m(s) = f(s \delta_m)$ regulär, und es ist für $\sigma > 0$

$$|f_m(s)| < K.$$

Ich setze nunmehr

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} f_m(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s}.$$

Wegen der für $\sigma > 0$ giltigen Ungleichung

$$|e^{-m} e^{-ms} f_m(s)| < e^{-m} \cdot K$$

ist die Reihe

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} f_m(s)$$

für $\sigma > 0$ gleichmässig konvergent. Es folgt hieraus, da ja die einzelnen Glieder der Reihe, d. h. die Grössen $e^{-m} e^{-ms} f_m(s)$ für $\sigma > 0$ regulär sind, dass $g(s)$ eine für $\sigma > 0$ reguläre analytische Funktion ist. Ferner ist, für $\sigma > 0$, $g(s)$ beschränkt; denn es ist für $\sigma > 0$

$$|g(s)| < \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} \cdot K = K_1,$$

wo K_1 von s nicht abhängt.

Es sei nunmehr die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s}$$

durch Umordnung ihrer Glieder in eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

formell verwandelt, d. h. es sei die Doppelfolge

$$m + n \delta_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots)$$

in eine Einzelfolge

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r < \dots \quad (\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_r = \infty)$$

umgeordnet; dies ist offenbar möglich, denn es sind erstens die Grössen $m + n \delta_m$ sämtlich > 0 (sogar > 1), zweitens ist, nach der obigen Bestimmung der Zahlenfolge $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$, eine Relation

$$m' + n' \delta_{m'} = m'' + n'' \delta_{m''}$$

d. h. eine Relation

$$(m' - m'') + n' \delta_{m'} - n'' \delta_{m''} = 0$$

nur dann vorhanden, wenn $m' = m''$, $n' = n''$ ist, und drittens sind offenbar, bei jedem $E > 0$, nur endlich viele Elemente der Doppelfolge $m + n \delta_m$ kleiner als E .

Ich behaupte nunmehr: es ist die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

für $\sigma > k$ absolut konvergent und gleich $g(s)$; dies ist offenbar bewiesen, wenn ich nachgewiesen habe: es ist für $\sigma > k$ die Doppelreihe mit reellen nicht negativen Gliedern

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)\sigma}$$

konvergent, d. h. es ist, bei jedem $\varepsilon > 0$, die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)(k+\varepsilon)}$$

konvergent. Dies ist tatsächlich der Fall und folgt unmittelbar daraus, dass, für alle $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{n=1}^{\sigma} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)(k+\varepsilon)} = e^{-m(k+1+\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\sigma} |b_n| e^{-n\delta_m(k+\varepsilon)}$$

$$< e^{-m(k+1+\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\sigma} |b_n| e^{-n\delta_m k} < e^{-m(k+1+\varepsilon)} \cdot 2 e^{m(k+1)} < 2 e^{-m\varepsilon}$$

ist, während ja die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\sigma} 2 e^{-m\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert.

Ich werde nunmehr beweisen: es ist $\sum_{r=1}^{\sigma} c_r e^{-\lambda_r s}$ für $\sigma = k$ nicht absolut konvergent, oder was offenbar auf dasselbe herauskommt: es ist die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-m} e^{-(m+n\delta_m)k} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(1+k)} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-n\delta_m k}$$

divergent. Dass dies letzte der Fall ist, folgt aber unmittelbar daraus, dass, wegen

$$\sum_{n=1}^{\sigma} |b_n| e^{-n\delta_m k} > e^{m(1+k)},$$

für alle $m = 1, 2, 3, \dots$

$$e^{-m(1+k)} \cdot \sum_{n=1}^{\sigma} |b_n| e^{-n\delta_m k} > e^{-m(1+k)} \cdot e^{m(1+k)} > 1$$

ist.

Es ist also die Dirichletsche Reihe

$$g(s) = \sum_{r=1}^{\sigma} c_r e^{-\lambda_r s}$$

für $\sigma > k$ absolut konvergent, für $\sigma = k$ dagegen nicht absolut konvergent, während die durch die Reihe definierte Funktion $g(s)$ für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt ist.

Damit ist der Satz *A* bewiesen.

Aus dem vorangehenden Satze *A* folgt speziell, dass keine feste positive Zahl k derart existiert, dass allgemein aus der vorausgesetzten Regularität und Beschränktheit für $\sigma > 0$ der durch eine Dirichletsche Reihe definierten Funktion die absolute Konvergenz der Reihe für $\sigma > k$ folgt.

Ich werde nunmehr den folgenden Satz *B* beweisen; damit sind alsdann die sämtlichen mit dem Hauptsatze in Zusammenhang stehenden Existenzfragen völlig erledigt.

Satz B. *Es existiert eine in einer gewissen Halbebene konvergente Dirichletsche Reihe (1) derart, dass die durch die Reihe dargestellte Funktion für $\sigma > 0$ regulär und beschränkt ist, während die Reihe jedoch nirgends absolut konvergiert.*

Zum Beweise dieses Satzes entnehme ich aus der Theorie der Potenzreihen den folgenden Existenzsatz 2, der etwas mehr aussagt als der früher benutzte.

Existenzsatz 2. *Es existiert eine für $|x| < 1$ absolut konvergente, für $|x| = 1$ nicht absolut konvergente Potenzreihe*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

derart, dass für alle $|x| < 1$ und alle ganzzahligen $N \geq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^N b_n x^n \right| < K$$

ist, wo K eine von x und N unabhängige, positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt speziell, dass, für $|x| < 1$, $|F(x)| \leq K$ ist.

Es mögen im folgenden die Grössen b_n die Bedeutung dieses letzten Existenzsatzes haben.

Ich bestimme nunmehr, auf ganz dieselbe Weise wie beim Beweise des Satzes *A*, eine Folge von positiven Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ derart, dass erstens, für alle $m = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{-n\delta_m \cdot m} > e^{m+m^2}$$

ist, und dass zweitens für kein ganzzahliges M eine Relation der Form

$$g_0 + g_1 \delta_1 + \dots + g_M \delta_M = 0$$

in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Grössen g_0, g_1, \dots, g_M besteht. Ferner setze ich wie vorher, für $\sigma > 0$,

$$f_m(s) = \sum_{n=1}^{\tau} b_n e^{-n\delta_m \cdot s}.$$

Dann ist offenbar, wegen $|f_m(s)| \leq K$ für $\sigma > 0$, die Reihe

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\tau} e^{-m} e^{-ms} f_m(s)$$

für $\sigma > 0$ konvergent und stellt eine für $\sigma > 0$ reguläre und beschränkte Funktion $g(s)$ dar.

Es sei nunmehr, ganz wie beim Beweise des Satzes A, die Doppelreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s}$$

durch Umordnung ihrer Glieder in eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

formell verwandelt.

Dann ist zunächst diese Dirichletsche Reihe, oder, was auf dasselbe herauskommt, die obige Doppelreihe, nirgends absolut konvergent, d. h. es ist bei jedem festen σ_0 die Doppelreihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{m=1}^{\tau} e^{-m} e^{-m\sigma_0} \sum_{n=1}^{\tau} |b_n| e^{-n\delta_m \sigma_0}$$

divergent; dies ergibt sich unmittelbar daraus, dass für alle $m > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\tau} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot \sigma_0} > \sum_{n=1}^{\tau} |b_n| e^{-n\delta_m \cdot m} > e^{m+m^2}$$

ist, also für alle $m > \sigma_0$

$$e^{-m} e^{-m\sigma_0} \sum_{n=1}^{\tau} |b_n| e^{-n\delta_m \sigma_0} > e^{-m} e^{-m\sigma_0} \cdot e^{m+m^2} = e^{m(m-\sigma_0)} > 1$$

ist.

Ich werde nunmehr beweisen: es ist, sogar für jedes $\sigma > 0$, die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$$

konvergent und gleich $g(s)$.

Ich bemerke zunächst, dass offenbar, bei jedem ganzzahligen $R > 0$, die endliche Summe

$$\sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_m} (b_n e^{-m}) e^{-(m+n\delta_m)s} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-ms} \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n\delta_m s}$$

ist, wo die Zahlen $N_m = N_m(R)$ ganze Zahlen ≥ 0 sind, die übrigens von einer gewissen Stelle an, d. h. für $m \geq m_0 = m_0(R)$, alle $= 0$ sind;¹ hierbei ist ferner, bei jedem festen m , $\lim_{R \rightarrow \infty} N_m = \infty$.

Hieraus ergibt sich aber leicht die Behauptung: es ist für $\sigma > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s} = g(s).$$

Es sei $\sigma_0 > 0$ und $s_0 = \sigma_0 + it_0$ eine feste Zahl; es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Ich bestimme alsdann zunächst eine ganze Zahl $M > 1$ derart, dass

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} < \frac{\varepsilon}{3K}$$

ist, wo K die Konstante des Existenzsatzes 2 bedeutet.

Nachdem M festgelegt ist, bestimme ich nunmehr eine ganze Zahl $N > 1$ derart, dass für alle $m = 1, 2, \dots, M$ und $n' \geq N$

$$\left| \sum_{n=n'+1}^{\infty} b_n e^{-n\delta_m s_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

ist, und zu diesem N bestimme ich schliesslich eine ganze Zahl $R_0 > 1$ derart, dass für $R \geq R_0$ und alle $m = 1, 2, \dots, M$

$$N_m = N_m(R) > N$$

¹ Unter $\sum_{n=1}^0 n$ ist 0 zu verstehen.

ist. Eine solche Wahl von R_0 ist möglich wegen der bei festem m giltigen Relation: $\lim_{R=\infty} N_m(R) = \infty$.

Dann behaupte ich: es ist für alle $R \geq R_0$

$$\left| \sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| < \varepsilon.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich folgendermassen: Es ist für $R \geq R_0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-m s_0} \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n \delta_m s_0} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m} e^{-m s_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right| \\ &< \sum_{m=1}^M e^{-m} \left| \sum_{n=N_m+1}^{\infty} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} \left| \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right|. \end{aligned}$$

Nun ist aber dem Existenzsatz 2 zufolge

$$\left| \sum_{n=1}^{N_m} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right| \leq K, \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n \delta_m s_0} \right| \leq K.$$

Es ergibt sich somit für $R \geq R_0$

$$\left| \sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s_0} - g(s_0) \right| < \sum_{m=1}^M e^{-m} \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + 2 \sum_{m=M+1}^{\infty} e^{-m} \cdot K < M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + 2K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon.$$

Es ist hiermit die Behauptung:

$$\lim_{R=\infty} \sum_{r=1}^R c_r e^{-\lambda_r s} = g(s)$$

für alle $\sigma > 0$ bewiesen.

Die Dirichletsche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-\lambda_r s}$ erfüllt somit die sämtlichen Bedingungen des Satzes B.

Damit ist dieser Satz bewiesen.

Kopenhagen, den 1. Dezember 1911.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES LIGNES CANTORIENNES.

PAR

M. L. ZORETTI

À CAEN.

1. Dans l'étude de la notion de continu, on peut se placer à deux points de vue bien différents. C'est le point de vue arithmétique pur qui a été surtout étudié. Il était en effet indispensable de baser uniquement sur la notion de nombre entier les définitions et propriétés dont on fait usage en analyse. Jusqu'à une époque toute récente, on avait fait en analyse un abus qui n'était pas sans danger, de l'intuition géométrique; et la revision approfondue des principes par PAUL DU BOIS REYMOND, G. CANTOR, JORDAN a eu le grand avantage d'asseoir définitivement sur des bases arithmétiques l'édifice analytique.

Un point de vue tout différent est le point de vue géométrique pur. On verra dans la suite de ce mémoire dans quelle mesure les travaux de CANTOR et JORDAN peuvent être considérés comme des recherches de géométrie. Mais il importe surtout de bien poser la question. M. ENRIQUES¹ distingue la géométrie élémentaire, la géométrie projective, la géométrie métrique et enfin l'analysis situs. Et c'est dans cette dernière branche de la géométrie que l'on étudie les propriétés générales de la ligne. C'est justement cette théorie générale de la ligne que l'on peut actuellement considérer comme à peine existante, et c'est elle qui fait l'objet de ce mémoire.

2. Je ne veux pas entreprendre ici une étude historique que l'on trouvera par exemple dans un article de l'Encyclopédie J. MOLK (Sur la notion de ligne, par VON MANGOLDT et L. ZORETTI). Je me bornerai à quelques remarques préliminaires.

¹ Encyclopédie des sciences mathématiques. Article sur les fondements de la géométrie.
Acta mathematica. 36. Imprimé le 28 octobre 1912.

Si l'on ouvre un traité classique de géométrie, on est frappé de ce fait que l'auteur, qui choisit en général avec le plus grand soin ses définitions et les développe d'après les règles de la logique, fait une exception pour la définition de la ligne. On ne peut en effet prendre pour une vraie définition, les conceptions de surface sans largeur, de trajectoire d'un point, de frontière d'une surface, généralement invoquées. Or il y a des rapports nécessaires entre les géométries ordinaires et l'analysis situs; et si l'on ne veut pas, ce qui serait l'attitude la plus logique mais la moins satisfaisante, s'interdire d'une façon absolue de prononcer le mot «ligne» en géométrie élémentaire, il faut alors établir comment l'introduction de ce mot se légitime même avant l'élaboration d'une théorie complète de la ligne.

Le plus simple est sans doute de ranger la notion de ligne parmi les intuitions a priori. Mais la difficulté n'est pas absolument résolue pour cela. En effet, quand on dira qu'une droite, une circonférence sont des lignes, ce sera par définition qu'il en sera ainsi; en d'autres termes on se bornera à définir des lignes particulières, à dresser le catalogue des êtres géométriques qui sont des lignes; mais la difficulté est de démontrer, ou même d'énoncer à chaque fois des propriétés de ces êtres. Par exemple, si l'on veut établir qu'une circonférence de cercle partage le plan en deux régions, il faudra entre autres propriétés entendre par là que toute *ligne* allant de l'intérieur à l'extérieur rencontre la circonférence; et on voit qu'on n'évite pas ainsi le mot ligne employé en général, d'où la nécessité, en l'absence de théorie générale, d'un nouvel appel à l'intuition. On pourrait essayer de se restreindre en ne considérant que des lignes formées de segments de droite; mais quiconque est familiarisé avec les paradoxes que l'on rencontre dans la théorie des ensembles de points, notamment avec l'existence d'ensembles parfaits discontinus qui ont des points sur toute droite, reconnaîtra sans peine combien cela serait insuffisant.

On voit donc combien il est nécessaire de définir la ligne en général, de démontrer des propriétés générales de la ligne ou de certaines lignes, de dégager en d'autres termes les axiomes de l'analysis situs et d'étudier ses rapports avec les autres branches de la géométrie.

Je crois que des explications qui précèdent, il découlera d'une façon évidente que cette étude n'est autre chose qu'un chapitre de la théorie des ensembles des points, mais ceux-ci étant considérés à un point de vue géométrique et non plus comme un ensemble de nombres.

Quant à la définition à adopter, elle est évidemment arbitraire mais la pratique nous impose de la choisir de la façon suivante. D'abord elle devra être d'allure aussi géométrique que possible; en second lieu elle devra serrer

d'aussi près que possible la conception vulgaire de la ligne. La notion de ligne s'est peu à peu formée dans notre esprit et s'y est implantée avec des caractéristiques que nous sentons vaguement, et qu'il s'agit justement de traduire en mots bien définis. Que, ces réserves faites, il reste plusieurs définitions acceptables, cela n'est pas douteux. Il est même fort possible que le choix de la »meilleure» de ces définitions ne puisse se faire actuellement. Nous verrons que telle définition parfaitement acceptable nous révèle la possibilité de particularités qu'on n'avait pas prévues. Il n'y a pas lieu de s'en étonner, mais simplement d'y voir un nouvel exemple de la haute valeur du raisonnement mathématique au point de vue de la compréhension des choses. Il joue à cet égard le même rôle qu'un instrument d'observation qui nous dévoile dans un phénomène qu'on croyait bien connaître des circonstances nouvelles.

3. Je me propose dans ce mémoire de commencer l'étude dont je viens de parler. J'étudie d'abord les définitions de JORDAN et de CANTOR, et je montre comment la deuxième est plus conforme au but que nous poursuivons. Je me trouve dès lors entièrement dans la théorie des ensembles, dont je supposerai connus les résultats principaux. J'étudie ensuite, en la présentant un peu différemment, la restriction que j'ai apportée à la définition de CANTOR par la notion de continu *irréductible*. Je démontre quelques propriétés générales de ces ensembles que je précise ensuite en apportant une nouvelle restriction à ma définition.

Je termine enfin en disant quelques mots de la notion de surface qui n'est pas sans présenter de grandes difficultés.¹

4. Pourquoi ne faut-il pas considérer comme suffisantes *au point de vue géométrique* les recherches de M. JORDAN sur les lignes? J'ai déjà insisté ailleurs sur l'importance capitale de ces travaux. Je le répète ici en affirmant que deux dates sont à retenir dans la théorie des ensembles: la période 1877—1882 où paraissent les mémoires de M. CANTOR et l'année 1892 où M. JORDAN publie ses résultats relatifs aux ensembles de points. On peut y ajouter l'année 1902 avec la définition de la mesure de BOREL-LEBESGUE. Mais quand M. JORDAN définit une ligne comme un ensemble de fonctions continues peut-on dire que ce

¹ J'aurai l'occasion de renvoyer quelquefois à mes publications antérieures, notamment à mon mémoire des Annales de l'Ecole Normale supérieure, 1909. Je désignerai ce mémoire par la lettre M.

Depuis la rédaction du présent mémoire, divers travaux sur les mêmes questions ont été publiés. Je citerai spécialement la thèse de M. JANISZEWSKI »Sur les continus irréductibles entre deux points», où se trouvent plusieurs des résultats de mes deux mémoires. M. JANISZEWSKI se borne aux arcs simples dans la recherche des propriétés générales. Voir Comptes rendus Ac. Sc. Paris t. CLI p. 198 et 201.

soit là une notion géométrique, ou facile à transporter en géométrie? Évidemment non. Un autre inconvénient est le suivant: on sait que la définition de JORDAN n'est pas identique à la notion vulgaire de ligne, puisqu'une ligne de JORDAN peut recouvrir une aire; en sorte qu'au point de vue géométrique c'est la notion de ligne *simple* de JORDAN qu'on pourrait seule à la rigueur admettre. Or j'ai démontré dans le mémoire cité plus haut que la notion de ligne irréductible que j'ai introduite est plus générale que celle de ligne simple de JORDAN tout en présentant, comme justement la suite de ce mémoire le montre, la plupart des caractères qui appartiennent à la ligne dont nous avons la notion vulgaire. On doit donc considérer la définition de JORDAN comme appropriée surtout aux recherches d'analyse: c'est d'ailleurs pour cela qu'elle a été faite.

5. Les travaux de M. CANTOR sont aussi des travaux d'arithmétique: c'est de l'espace *arithmétique* à n dimensions qu'il s'agit.¹ Mais le langage géométrique rend évidemment très facile le transport en géométrie ordinaire.

Examinons donc en premier lieu quelles notions sont pour cela nécessaires, en d'autres termes sur quelles intuitions ou sur quels axiomes géométriques se base la théorie des ensembles des points.

En premier lieu vient évidemment la notion de point, et celle de point limite; pour cette dernière il nous faut introduire la notion de distance de deux points et les propriétés de cette distance.² Je dis que c'est là tout ce dont nous avons besoin. On peut en effet certainement démontrer le principe de BOLZANO-WEIERSTRASS en s'appuyant uniquement sur ces notions. Les carrés dont on fait usage d'ordinaire pourront être remplacés par des familles de cercles ayant pour centres deux points fixes non points limites de l'ensemble, de façon à faire intervenir uniquement la distance à des points. Quant à la notion «d'ensemble limite» qui suffit pour conclure, elle n'exige rien de plus, elle aussi.

Ceci rend donc légitimes les propriétés des ensembles fermés et parfaits. Arrivons à la définition du continu d'après CANTOR. C'est un ensemble parfait bien enchaîné: cette définition repose donc encore sur la notion de distance. Il en est de même de la distinction des ensembles superficiels et linéaires, la définition des points frontières et des points intérieurs.

La définition de CANTOR présente incontestablement l'allure géométrique que nous réclamions. J'ai déjà signalé ailleurs que les ensembles qui répondent à

¹ G. CANTOR, Acta t. 2 p. 404.

² Comparer ces indications à celles qui sont développées dans la note 1 (p. 75) de la thèse de M. JANISZEWSKI (Paris, 1911).

cette définition et que j'ai appelés avec M. PAINLEVÉ lignes cantorienne ne sont pas identiques aux lignes de JORDAN. Il est bon d'y insister en montrant par des exemples jusqu'où peut aller la complication d'une ligne cantorienne. Cette complication nous révélera la nécessité de restrictions à apporter à la définition si l'on veut pouvoir démontrer des propriétés simples et générales.

Je me borne à deux exemples¹ 1:0 la ligne dont l'équation est $y = \sin \frac{1}{x}$ à laquelle on adjoint le segment $+1, -1$ de l'axe des y . Cet exemple est aujourd'hui classique. Cette ligne n'est pas une ligne de JORDAN, c'est une ligne cantorienne. 2:0. Considérons deux ensembles parfaits non denses sur les deux segments $0-1$ de deux droites rectangulaires. Par les différents points de chacun menons des perpendiculaires de longueur 1 à la droite qui porte l'ensemble. L'ensemble non dénombrable de droites obtenu est une ligne cantorienne. Elle découpe le plan en une infinité (dénombrable) de petits carrés.

On voit que si l'exemple précédent est compliqué, il est au moins construit au moyen d'éléments très simples, des segments de droite. Il est donc important dans l'étude générale que nous entreprenons de généraliser ce fait, c'est à dire 1:0 de tâcher de définir, parmi les lignes cantorienne, certaines lignes qu'on pourra appeler élémentaires et de les étudier à part; 2:0 de se demander si toute ligne cantorienne ou même tout continu peut être décomposé en fractions élémentaires. Les lignes élémentaires en question seront celles que j'ai introduites sous le nom de lignes irréductibles, d'abord dans un cours professé au Collège de France en 1908—09, puis dans mon mémoire déjà cité. J'ai commencé alors l'étude de ces ensembles, mais je suis depuis parvenu à une propriété qui me permet, comme je vais le faire, d'adopter un mode d'exposition synthétique, en procédant du compliqué au simple. Ainsi sera marquée la vraie place de l'étude des ensembles simples auxquels nous aboutirons.

6. Soit un ensemble continu C et deux points a, b de l'ensemble. Si l'on peut trouver une portion continue de C qui comprenne a et b , l'ensemble C sera dit *réductible*. Si une telle portion n'existe pas (c'est à dire se confond avec C) l'ensemble sera dit *irréductible*.

Soit donc un continu C (ligne ou aire, ou même dans un espace à un nombre quelconque de dimensions), soient a et b deux points de l'ensemble. Deux cas sont possibles: ou bien il est irréductible entre a et b , ou bien il ne

¹ On en trouvera de nombreux dans la thèse de M. JANISZEWSKI. Voir aussi BROUWER, Math. Ann. t. 68.

l'est pas; je dis que dans ce dernier cas on peut trouver une portion de C qui soit continue et irréductible entre a et b .¹

Je ferai d'abord quelques remarques générales. Soit m un point d'un continu C non irréductible entre les deux points a et b . Deux cas peuvent se présenter; ou bien il n'existe aucun cercle de centre m tel que dans la portion de C extérieure à ce cercle on puisse trouver un continu contenant a et b ; ou bien au contraire un tel cercle existe. Dans ce dernier cas, tous les cercles de rayon plus petits ont encore la même propriété. Les rayons de ces cercles admettent donc pour un point donné m une limite maximum r . Les points de première sorte peuvent exister ou ne pas exister (exemple: l'ensemble formé par deux segments perpendiculaires en leur milieu présente de tels points si a et b sont les extrémités d'un segment; au contraire l'ensemble de points d'une circonférence n'en présente point). Mais les points de seconde sorte que j'appellerai *points secondaires* d'écart r existent certainement si l'ensemble donné n'est pas irréductible. En effet il existe une portion E de C continue et contenant a et b . Soit m un point de C qui n'appartient pas à E et qui par suite n'est pas non plus limite de E : tout cercle ayant m pour centre et de rayon inférieur à l'écart de m à E laisse à son extérieur les points de E et par suite une portion continue de C contenant a et b . Si donc un ensemble n'a que des points de première sorte, il est irréductible.

Remarquons encore que pour un ensemble donné C , le nombre r admet une limite maximum et que cette limite, l'ensemble étant fermé, est la valeur de r qui correspond à un point au moins de C : la démonstration d'une propriété de ce genre est classique et je crois inutile de la faire tout au long.

Soit alors un ensemble C , soit m le point secondaire pour lequel r est maximum (ou l'un de ces points). Considérons la portion de C extérieure au cercle de centre m et de rayon r , et dans cette portion, une portion continue C_1 contenant a et b . Si cette portion C_1 est irréductible, le théorème est démontré. Si elle ne l'est pas, elle admet des points secondaires. Enlevons encore les points de C_1 intérieurs au cercle maximum répondant à ces points, et dans l'ensemble restant, soit C_2 une portion continue contenant a et b ; C_2 est ou non irréductible. Si

¹ Ce théorème a été démontré par M. S. JANISZEWSKI dans une note parue aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences 1910. J'étais à ce moment là en possession de la démonstration qu'on va lire; le présent mémoire était même déjà rédigé. La démonstration de M. JANISZEWSKI étant basée sur les propriétés des nombres transfinis ma démonstration en diffère complètement et je crois pouvoir la publier. M. MAZURKIEWICZ a publié dans les Comptes rendus (même tome p. 296) une démonstration également indépendante de la théorie des nombres transfinis. Cette démonstration est différente de la mienne, que j'avais de plus annoncée à la date du 6 juin 1910 (Comptes rendus t. 150 p. 1505).

C_2 n'est pas irréductible on opérera de même sur lui, et ainsi de suite. Alors ou bien on tombera sur un ensemble irréductible contenant a et b , ou bien cela n'arrivera jamais. Examinons ce dernier cas.

Les ensembles continus $C, C_1, C_2 \dots$ mis en évidence sont tels que chacun contient a et b et contient aussi tous les suivants. Il y a donc, comme on le sait, un ensemble limite I qui est continu et contient a et b . Je dis que I est irréductible.

Si en effet il ne l'était pas, il renfermerait des points secondaires d'un certain rayon. La contradiction sera évidente, si nous montrons que les rayons des cercles successivement exclus pour construire $C_1, C_2 \dots$ tendent vers zéro.

Or ce dernier point résulte de cette remarque que le centre de tout cercle exclu est extérieur à tous les cercles précédemment exclus. Si donc les rayons des cercles exclus avaient une limite inférieure non nulle ϱ , et si l'ensemble C qui est borné est tout entier intérieur à un cercle de rayon R , au bout d'un nombre limité d'exclusions, au plus égal à $\frac{R^2}{7\varrho^2}$ tous les points de C se trouveraient exclus, ce qui est absurde puisque les C_n sont supposés exister quel que soit n . La propriété énoncée est donc bien acquise.

La propriété précédente nous apprend comment on peut *extraire* d'un continu quelconque une portion irréductible. Elle nous donne même un procédé pour construire cette portion irréductible. Dans cette voie, il y aurait lieu de compléter ce résultat en recherchant de quelles portions irréductibles on peut considérer un continu quelconque comme constitué. C'est une question que je ne traite pas. Quoi-qu'il en soit, il semblera maintenant bien naturel de commencer l'étude des lignes cantoriennees par l'étude des continus irréductibles.

Propriétés des lignes irréductibles.

7. Ce qui augmente le caractère de nécessité de la restriction apportée à la définition de CANTOR par la définition des lignes irréductibles, c'est que les lignes simples de M. JORDAN sont des continus irréductibles; les lignes irréductibles sont plus conformes que les lignes cantoriennees ordinaires à notre notion vulgaire de ligne, et elles permettent comme on va le voir la démonstration de propriétés générales.

D'ailleurs les lignes irréductibles elles mêmes peuvent être encore assez compliquées, et nous verrons que moyennant l'introduction d'une restriction nouvelle, leurs propriétés se simplifient beaucoup. Je ne tranche pas la question,

secondaire d'après moi, de savoir laquelle des deux définitions doit être conservée de préférence. La définition large précédente a au moins l'avantage de permettre l'étude de la ligne cantorienne en général. La recherche des propriétés en peut être plus laborieuse, mais tout résultat acquis n'en a que plus d'importance et s'applique, comme cas particulier, aux lignes irréductibles restreintes.

J'ai démontré dans mon Mémoire qu'un continu irréductible ne peut contenir aucun point intérieur. Donc dans un espace à deux dimensions, un continu irréductible est nécessairement *linéaire*. Mais dans l'espace à trois dimensions, il peut comprendre une portion de surface comme on s'en rend compte par l'exemple suivant: soit dans le plan xOy un ensemble dénombrable de cercles C_n ayant l'origine pour centre et pour rayons les fractions inférieures à un par exemple (ou un ensemble de nombres dense dans l'intervalle $0-1$). Considérons une spire d'hélice Γ_1 , dont la projection sur le plan xOy soit le cercle C_1 , commençant au point $z=1$, $x=0$, et se terminant au point $z=\frac{1}{2}$, $x=0$, traçons de même une deuxième spire d'hélice Γ_2 de pas

$\frac{1}{4}$ sur le cylindre de base C_2 entre les plans $z=\frac{1}{2}$ et $z=\frac{1}{4}$ et ainsi de suite, toutes les hélices commençant et finissant dans le plan yOz en des points dont l' y est positif. Raccordons le commencement d'une hélice et la fin de la précédente par un segment de droite parallèle à Oy . Nous obtenons ainsi une courbe qui en lui adjoignant tous les points intérieurs (sens large) au cercle de rayon un du plan xOy forment un continu irréductible entre l'origine de la première hélice et un point quelconque de l'ensemble dans le plan xOy .¹

8. Revenant au cas du plan, nous allons maintenant aborder l'étude des continus irréductibles en général. Mais auparavant je vais démontrer un théorème général sur les ensembles bien enchaînés qui jouera un rôle très important dans la suite. Ce lemme généralise un théorème que j'ai démontré dans mon mémoire des Annales de l'Ecole Normale. L'énoncé que j'avais établi alors est le suivant: *La somme de deux ensembles fermés ayant un seul point commun ne peut être continue que si les deux ensembles le sont séparément.* Si l'on regarde la démonstration, on verra que l'hypothèse que les ensembles sont fermés intervient peu. Quant à l'ensemble-somme, il est inutile de le supposer fermé. On utilise seulement ce fait qu'il est bien enchaîné. Cependant on ne peut pas se débarrasser entièrement de l'hypothèse que les ensembles donnés sont fermés. Voici l'énoncé que je propose et utiliserai dans la suite: *Soient deux*

¹ M. JANISZEWSKI donne d'autres exemples.

ensembles C et I jouissant des propriétés suivantes 1:0 leur somme est bien enchaînée, 2:0 I contient exclusivement des points limites de C . Je dis que C est bien enchaîné.

Supposons qu'il ne le soit pas. Soient a et b deux points de C^1 pour lesquels un nombre ε existe tel que l'on ne puisse pas aller de a en b par une chaîne de points de C de chaînons inférieurs à ε . Il en résulte que, si l'on trace les cercles de rayons ε ayant pour centres les points de C , ces points recouvriront un nombre au moins égal à deux de domaines séparés, et a et b ne seront certainement pas dans le même domaine. Or les cercles ainsi tracés se trouvent renfermer en même temps tous les points de I qui sont limites de C . Cela est contradictoire avec l'hypothèse que la somme est bien enchaînée.

9. La propriété essentielle des continus irréductibles est la possibilité de définir pour eux en général la notion de «situé entre» c'est à dire un ordre de succession des points. À vrai dire pour les ensembles irréductibles les plus généraux je ne définis pas cet ordre pour *tous* les points: il y aura des points pour lesquels on pourra dire que l'un est avant l'autre (ce sont les plus nombreux) mais il y en aura aussi dont on ne pourra pas dire lequel est le premier. Les ensembles irréductibles pour lesquels ces derniers points n'existent pas formeront une catégorie restreinte, particulièrement simple: je les appellerai ensembles irréductibles *simples*. C'est à ceux-là que se bornent les résultats de M. JANISZEWSKI.

Les théorèmes dont la succession va nous conduire au résultat généralisent pour la plupart des énoncés donnés dans mon premier mémoire. J'ai déjà signalé ailleurs² que deux erreurs sont à remarquer dans ce mémoire. On verra plus loin que le résultat essentiel n'en est pas moins exact. Quoiqu'il en soit, la rédaction ci-dessous ne supposera pas chez le lecteur la connaissance préalable de mes premières démonstrations. Mais si l'on s'y reporte pour établir une comparaison, on reconnaîtra que j'ai été obligé d'introduire une certaine complication qui me paraît bien ne pas pouvoir être réduite beaucoup, à moins de se borner aux ensembles irréductibles *simples*.

10. J'ai donné dans mon mémoire la propriété suivante:

¹ C comprend au moins deux points sans quoi C est un point, I n'existe pas, $C + I$ est un point. D'ailleurs, dans la suite, je considérerai toujours pour abrégé les énoncés un ensemble formé d'un seul point comme un continu ou comme un ensemble bien enchaîné (mais pas comme un ensemble fermé). Cela est évidemment légitime, et alors le théorème du texte peut s'appliquer.

² Comptes rendus Ac. sc. t. 151 p. 201; Annales École Normale 1909 p. 567. Dans cette dernière note, les passages erronés sont indiqués. De ma rectification résulte l'identité de la notion de ligne simple et de ligne de JORDAN. Voir JANISZEWSKI, thèse p. 3.

Si l'on décompose un continu C irréductible entre a et b en deux continus ayant un et un seul point commun, c , chacun d'eux est séparément irréductible, l'un entre a et c , l'autre entre b et c .

Voici l'énoncé plus général que je vais lui substituer :

Soit un continu C irréductible entre deux points a et b et soit c un point de l'ensemble. Supposons C décomposé en trois ensembles C_1 , C_2 , Γ jouissant des propriétés suivantes : C_1 et C_2 ont c pour seul point commun, chacun d'eux est dense en soi et bien enchaîné (mais non fermé), $C_1 + \Gamma$ contient a , $C_2 + \Gamma$ contient b ; les points de Γ sont des points limites à la fois de C_1 et de C_2 . Dans ces conditions, chacun des ensembles $C_1 + \Gamma$, $C_2 + \Gamma$ est un continu irréductible. En second lieu, une telle décomposition, le point c étant donné, n'est possible que d'une manière.

Remarquons d'abord qu'un point limite de C_1 devant appartenir à C et ne pouvant appartenir à C_2 appartient soit à C_1 , soit à Γ (en comptant c comme point de Γ). Si l'on ajoute à C_1 son dérivé, on trouve $C_1 + \Gamma$; si l'on ajoute à C_2 son dérivé, on trouve $C_2 + \Gamma$. Ces deux ensembles, $C_1 + \Gamma$ et $C_2 + \Gamma$, sont continus (fermés et bien enchaînés). Supposons qu'il existe une portion Γ_1 de $C_1 + \Gamma$ continue et contenant a et c , considérons l'ensemble $\Gamma_1 + \Gamma + C_2$, il est continu (somme de deux continus qui ont un point c commun); il contient a et b . Je dis que c'est une portion de C , car les points de $C_1 + \Gamma$ qui ont été écartés pour construire Γ_1 , ne peuvent être tous des points de Γ : dès qu'un point de Γ est enlevé tous les points voisins le sont, donc des points de C_1 sont enlevés et ces points ne peuvent se retrouver dans C_2 . Donc $\Gamma_1 + \Gamma + C_2$ n'est qu'une portion de C et C n'est pas irréductible.

La décomposition n'est possible que d'une manière. Soit en effet une seconde décomposition $C'_1 + C'_2 + \Gamma'$ jouissant des mêmes propriétés, et c étant toujours l'unique point commun à C'_1 et C'_2 . Les ensembles $C'_1 + \Gamma'$, $C'_2 + \Gamma'$; $C_1 + \Gamma$, $C_2 + \Gamma$ sont continus. Les deux ensembles $C'_1 + \Gamma'$ et $C_2 + \Gamma$ ont le point c commun. Le premier contient a , le second contient b . Leur somme est un continu contenant a et b ; comme c'est une portion de C , elle est identique à C .

Prenons un point de C_1 , il appartient à $C'_1 + \Gamma' + C_2 + \Gamma$, comme il n'appartient ni à C_2 (s'il n'est pas c), ni à Γ , il appartient à $C'_1 + \Gamma'$. De plus tout point de $C_1 + \Gamma$ appartient aussi à $C'_1 + \Gamma'$, car un point de Γ étant limite de points de C_1 , est limite de $C'_1 + \Gamma'$, et ce dernier est fermé. De même on verra que tout point de $C'_1 + \Gamma'$ appartient à $C_1 + \Gamma$. On en conclut que les ensembles $C_1 + \Gamma$, $C'_1 + \Gamma'$ d'une part, $C_2 + \Gamma$, $C'_2 + \Gamma'$ d'autre part, sont identiques.

Remarquons encore que tout point limite de C_1 , appartenant à C_1 ou à Γ , est limite de $C_1 + \Gamma$; de même tout point limite de $C_1 + \Gamma$ est limite de C_1 car

s'il est limite de I' , il est limite de points limites de C_1 . On peut donc dire que I' est l'ensemble des points limites communs à $C_1 + I'$ et à $C_2 + I'$, ou encore à $C'_1 + I'$ et à $C'_2 + I'$ qui sont les mêmes. Donc I' est identique à I'' , C_1 à C'_1 et C_2 à C'_2 .¹

II. J'arrive maintenant au théorème que j'ai en vue et pour préparer sa démonstration, je commence par en étudier un cas particulier simple.

Je dirai qu'un continu irréductible entre deux points a , b est *simple* si, c étant un point quelconque de l'ensemble, on peut décomposer celui-ci en deux continus contenant l'un a et l'autre b et ayant en commun le seul point c .²

D'ailleurs il est inutile de faire explicitement l'hypothèse que ces deux continus C_1 , C_2 contiennent l'un a et l'autre b , car si a et b étaient tous deux dans C_1 par exemple, C_1 serait une portion continue de C contenant a et b .

Les deux continus trouvés sont irréductibles l'un entre a et c , l'autre entre b et c . De plus nous savons déjà que la décomposition n'est possible que d'une manière. On voit ce qu'il faudra entendre en disant qu'un point c est *avant* un point d (en allant de a vers b). On voit aussi ce que sera l'arc cd : ce sera la partie commune aux continus ad , ac .

Ceci posé je vais démontrer le théorème suivant:

*Soit C un continu irréductible simple entre deux points a et b . Soit m un point fixe de C , p un point variable de C tendant vers m . L'ensemble limite de l'arc mp est réduit au seul point m .*³

En effet, d'abord l'arc mp est continu, et il en est de même de l'ensemble limite L puisqu'il y a un point, le point m commun à tous les arcs mp . Il faut montrer que ce continu L est réduit à un point. Supposons pour fixer les idées p com-

¹ On peut donner une démonstration analogue à celle du texte du théorème 5 (M. p. 491) d'après lequel un continu irréductible ne peut que d'une seule manière être décomposé en deux continus ayant un seul point commun c . Je la donne ici, car elle est plus simple que celle du Mémoire cité. Soient C_1 , C_2 ; I_1 , I_2 deux telles décompositions C_1 et I_1 contenant a , C_2 et I_2 contenant b . L'ensemble $C_1 + I_2$ est un continu contenant a et b . Il est donc identique à C , c'est à dire à $C_1 + C_2$. Un point quelconque de C_2 (autre que c) appartient donc à I_2 , puisqu'il n'appartient certainement pas à C_1 . On en déduit que C_2 est identique à I_2 et naturellement C_1 à I_1 .

Remarquons encore que le théorème subsiste si on suppose que I' comprend, outre des points limites de C_1 et C_2 un ensemble dense en soi de points, pourvu que $C_1 + I'$ et $C_2 + I'$ soient continus.

² Au lieu de «deux continus» on pourrait dire «deux ensembles fermés», car il sont alors nécessairement continus.

³ Cette démonstration établit l'identité entre le notion d'ensemble irréductible *simple* et ce que j'appelais dans mon mémoire ensemble *complètement fermé*. Je laisse au lecteur le soin de voir comment la démonstration du théorème principal: identité entre l'ensemble irréductible simple et la ligne de JORDAN, subsiste entièrement, le lemme de la page 490 devenant inutile ainsi que la restriction faite p. 492.

pris sur l'arc am et prenons sur L un point q distinct de m . Deux cas sont à distinguer suivant que bm contient q ou ne contient pas q . Dans le premier cas, on ne pourra pas décomposer C en deux continus ayant m seul en commun. En effet l'arc pm est un ensemble fermé; il doit donc contenir q puisque q est voisin de certains points de pm . Donc l'arc am contient aussi ce point q , qui se trouve commun à am et bm . Supposons au contraire que bm ne contienne pas q . Alors l'arc qb contient m . Mais qa contient p puisque q est sur pm . Et comme p est aussi voisin de m qu'on veut, qa doit également contenir m (qa est fermé). Cette fois-ci ce sont les arcs qb et qa qui ont m en commun, et cela est contraire à l'hypothèse.

Donc L ne peut que se réduire au point m .

12. Nous allons nous proposer de généraliser ce résultat en ne faisant plus aucune hypothèse sur l'ensemble irréductible donné. Voici le théorème que je vais démontrer:

Etant donné un continu irréductible C et un point c de l'ensemble, il est en général possible et d'une seule manière (le point c étant donné) de décomposer C en trois ensembles C'_1 , C'_2 , Γ jouissant des propriétés suivantes:

1:0 C'_1 et C'_2 sont bien enchaînés et ont en commun le seul point c ;

2:0 Γ est formé uniquement de l'ensemble des points limites communs aux ensembles C'_1 et C'_2 (et du point c).

Nous savons déjà que dans ces conditions, chacun des ensembles $C'_1 + \Gamma$, $C'_2 + \Gamma$ est continu et irréductible.

La démonstration généralise celle que j'avais donnée (M. p. 490) et qui présentait un point inexact. Je la reprends entièrement.

Soit D le domaine lieu des points dont l'écart à C est inférieur ou égal à ε . La frontière extérieure de D limite un domaine \mathcal{A} . Au moyen d'une droite issue du point c de C et qui n'a pas en commun avec C un continu contenant c (une telle droite existe, voir page 265 du présent mémoire) je décompose \mathcal{A} en deux aires \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 dont chacune contient une portion de C . On peut supposer que a est dans \mathcal{A}_1 et b dans \mathcal{A}_2 .

Les ensembles limites des aires \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 sont deux continus C_1 , C_2 qui ont en commun le point c ; l'un contient a , l'autre b . De plus tout point de C appartient à un de ces ensembles et inversement leur réunion forme C . Je laisse de côté les détails de la démonstration des différents points précédents. Le lecteur n'aura aucune peine à les établir et d'ailleurs ils sont donnés dans mon premier mémoire. Mais il importe d'observer (c'est justement là qu'était

l'erreur de ma première démonstration) que les ensembles C_1 et C_2 ont en général d'autres points communs que c .¹

Soit donc Γ l'ensemble des points communs à C_1 et à C_2 . Désignons par C'_1 et C'_2 les autres points de C_1 et de C_2 auxquels nous ajoutons le point c . Il en résulte donc que C'_1 et C'_2 ont un seul point commun, le point c . De même C'_1 et Γ ont le même point comme seul point commun.²

Il peut se faire qu'il y ait dans Γ des points limites de C'_1 sans être limites de C'_2 et des points limites de C'_2 sans être limites de C'_1 . Comptons les premiers parmi les points de C'_1 et les autres parmi les points de C'_2 ; conservons les mêmes noms aux ensembles ainsi accrus C''_1 , C''_2 et à l'ensemble amoindri Γ , il reste vrai que $C'_1 C'_2$; $C'_1 \Gamma$; $C'_2 \Gamma$ ont un seul point commun c . Les points qui restent dans Γ sont limites à la fois pour C'_1 et pour C'_2 : montrer cela revient à montrer que dans l'ensemble Γ primitif il n'y avait aucun point qui ne soit limite d'un au moins des ensembles C'_1 et C'_2 . En effet un point de l'ensemble que nous appelions d'abord Γ est un point qui appartient par exemple à l'aire \mathcal{A}_1 et qui est voisin de points de \mathcal{A}_2 , ou ce qui revient au même, de points de C situés dans \mathcal{A}_2 , ou mieux dans tous les \mathcal{A}_2 (à partir de l'un d'eux), donc un tel point est voisin de points de C'_2 .

Considérons alors l'ensemble $C_1 = C'_1 + \Gamma$, il est continu donc bien enchaîné, et comme Γ est formé uniquement de points limites de C'_1 , cela entraîne d'après le théorème de la page 248, que C'_1 est bien enchaîné. De même C'_2 est bien enchaîné.

Nous avons donc décomposé C en trois ensembles C'_1 , C'_2 , Γ tels que les deux premiers sont bien enchaînés et ont un seul point commun; de plus le troisième est formé uniquement des points limites communs aux deux premiers.

Plusieurs cas sont alors possibles: ou bien a est dans $C'_1 + \Gamma$ et b dans $C'_2 + \Gamma$. Nous savons alors que chacun de ces ensembles est irréductible et que la décomposition n'est possible que d'une manière. Ou bien, a et b sont par exemple tous deux dans $C'_2 + \Gamma$. Alors a qui figurait dans C_1 figurait dans l'ensemble initial Γ , puisque c'est de là qu'il a du être extrait pour être ajouté à C'_2 .

¹ Cela tient à ce que \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 ne vont pas constamment en diminuant quand ε tend vers zéro. On s'en rend compte au moyen de l'ensemble $y = \sin \frac{1}{x}$ en prenant c à l'origine des coordonnées. Les aires \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 seront de petites bandes sinusoidales se raccordant sur un petit segment de l'axe des x . Si l'on prend un point de l'ensemble sur l'axe Oy , ce point appartiendra par exemple à \mathcal{A}_1 et ne cessera pas d'appartenir à \mathcal{A}_1 quand ε diminuera; mais en même temps, certaines des spires de la bande sinusoidale \mathcal{A}_2 sont voisines de lui, et quand ε diminue, ces spires augmentent en nombre en se rapprochant de plus en plus du point donné, qui donc, sans jamais appartenir à \mathcal{A}_2 , appartient à l'ensemble limite C_2 de \mathcal{A}_2 .

² Remarquons que C'_1 ou C'_2 peuvent se réduire à ce seul point c .

Donc C_2 contenait a et b , et comme C_2 est continu, C_2 épuise C . Donc C'_1 n'existe pas (se réduit à c); l'ensemble initial Γ est continu, et l'ensemble donné est décomposé en deux ensembles C'_2 et Γ ; le dernier est continu non réduit à un point, et tous ses points sont limites de C'_2 ; C'_2 est bien enchainé (cela résulte d'ailleurs du lemme p. 248—249).

Si Γ se réduisait à un point (le point c) il serait encore nécessaire que C'_1 se réduise lui même au point c car sans cela $C'_2 + c$ serait portion continue de C contenant a et b , ce qui est impossible. Nous retombons sur le cas particulier précédent. Dans ce cas particulier, on peut encore dire qu'on a réalisé la décomposition cherchée: C'_1 et Γ sont réduits à c , C'_2 est C . Cette dernière décomposition est une solution banale applicable à tout continu; mais ici c'est la vraie solution du problème, à moins qu'on ne préfère dire que c'est un cas d'exception pour le théorème. La vraie caractéristique de ce cas est la décomposition en deux ensembles C'_2 et Γ le dernier continu, le premier bien enchainé, tout point de Γ étant limite de C'_2 . Le seul point commun à ces deux ensembles est c . Dans la suite ce cas d'exception sera en général écarté.

13. Eclaircissons ceci par quelques exemples.

Soit d'abord la courbe

$$y = \sin \frac{x}{2\pi}$$

complétée par les points

$$x = 0 \qquad -1 \leq y \leq 1,$$

Prenons pour a et b les points $x = \pm \frac{1}{2\pi}$, $y = 0$ par exemple, et pour c un point quelconque du segment $-1, +1$ de l'axe des y . Les ensembles C'_1 , C'_2 sont respectivement formés des courbes $y = \sin \frac{x}{2\pi}$ ($x \geq 0$) proprement dites, Γ comprend le segment entier $-1, +1$.

Prenons du continu précédent les seuls points où x est positif ou nul. Prenons pour a ($x = \frac{1}{2\pi}$, $y = 0$), pour b l'origine, pour c un point quelconque de l'axe des y . Dans ce cas C'_1 comprend tout l'ensemble. C'_2 et Γ sont respectivement réduits au point c . C'est le cas exceptionnel signalé à la fin de la démonstration.

On peut encore se demander comment est faite en général la portion Γ . Si elle se réduit à un point (quel que soit c) sans qu'il soit de même de C_1 ou de C_2 , l'ensemble est irréductible simple.

Voici quelques questions qu'on peut se poser.

On peut d'abord se demander si I est nécessairement continu: on peut par des exemples montrer qu'il n'en est rien. On peut également rechercher si I n'est pas formé exclusivement de portions continues ou de points isolés, et si les portions continues ne seraient pas irréductible simple. Je laisse de côté pour l'instant toutes ces questions comme secondaires.

14. Soient maintenant un continu C irréductible entre a et b ; soient m et p deux points de l'ensemble, proposons nous de définir l'arc mp .

Au moyen d'un point p on peut décomposer C en trois ensembles C_1 , I , C_2 , jouissant des propriétés vues dans le paragraphe précédent; supposons que a soit dans $C_1 + I$ et b dans $C_2 + I$; par définition $C_1 + I$ est dit l'arc ap . Le point m appartiendra soit à $C_1 + I$ soit à $C_2 + I$ (s'il appartient à I , nous choisirons l'un quelconque des deux ensembles $C_1 + I$, $C_2 + I$) soit $C_1 + I$ par exemple. Ce dernier ensemble est un continu irréductible entre a et p . Le point m le décompose en trois ensembles C'_1 , I' , C'_2 jouissant toujours des mêmes propriétés. C'est l'ensemble continu $I' + C'_2$ qui sera par définition l'arc mp .

Je dis que nous aurions trouvé le même continu, si dans la construction précédente nous avions permuté les rôles des points m et p . Considérons d'abord les deux ensembles $C'_1 + I'$, $I' + C'_2 + C_2$. Extrayons de C'_1 les points de C'_1 qui seraient limites de C_2 , et ajoutons les à I' ; de même extrayons de $C_2 + C'_2$ c'est à dire de C_2 les points qui sont limites de C'_1 et ajoutons les à I' : ces points sont les mêmes des deux côtés, ce sont en effet les points limites communs de C'_1 et C_2 qui ne seraient pas déjà points de I' ; un tel point est un point de C'_1 puisque il appartient à $C'_1 + I'$ qui est fermé et n'appartient pas à I' , il est de même point de C_2 car C'_2 et C'_1 n'ont pas de point commun. Désignons par $C''_1 I''$; $I'' C''_3$ ce que deviennent respectivement les ensembles $C'_1 I'$ et $C'_2 + C_2$; C''_1 et C''_3 n'ont plus que le point m commun; les ensembles C''_1 et C''_3 sont bien enchaînés d'après le lemme de la page 248, puisque les points de I'' sont tous limites de C''_1 ou de C''_3 et d'autre part la somme $C''_1 + I''$ qui est identique à $C'_1 + I'$, est bien enchaîné ainsi que $C''_3 + I'$. La décomposition (possible d'une seule manière) de C en deux par le point m est donc bien réalisée par les ensembles $C'_1 + I'$ et $I' + C'_2 + C_2$.

Le point p appartient au second; je dis que pour décomposer par le point p l'ensemble $I' + C'_2 + C_2$ il faut prendre d'une part $I' + C'_2$, et d'autre part C_2 augmenté de ses points limites qui forment deux groupes: ceux qui sont déjà dans $I' + C'_2$, soient C'''_1 et ceux qui n'y sont pas, soient C'''_4 . Posons $C_5 = C_2 + C'''_4$. Tous les points du continu $I' + C'_2 + C_2$ ont ainsi leur place. L'en-

semble C_5 n'a pas de point commun autre que a avec $I' + C'_2$, car un tel point serait commun à C_2 et à $C'_2 + I'$ c'est à dire à C_2 et à $C_1 + I'$ ce qui est absurde. En extrayant de C'_2 pour les reporter dans I' les points de C'_2 qui seraient aussi limites de $C''_4 + C_5$ c'est à dire les points de C''_4 qui ne seraient pas déjà dans I' la portion de C'_2 qui reste est bien enchaînée toujours d'après le même lemme, il en est de même de C_5 . Donc, la décomposition par le point p est bien ainsi réalisée. Donc l'arc mp est bien encore $I' + C'_2$.

Remarquons que l'arc mp est irréductible entre m et p . Si q est un point quelconque de l'arc mp , l'arc mq et l'arc pq sont deux portions de l'arc mp (mais il peut arriver que l'une de ces portions soit identique à mp lui-même) et l'on peut dire que

$$\text{arc } pq + \text{arc } qm = \text{arc } pm$$

en remarquant toutefois que les arcs pq et qm peuvent avoir des points communs (points limites communs de chacun d'eux).

On voit donc ce qu'on devra entendre par «point situé avant ou après un autre». Soit m un point; un point de l'arc am sera dit *avant* m (plus près de a) quand il n'est pas en même temps point de l'arc bm . En d'autres termes, le point m décompose C en trois ensembles C_1 , I' , C_2 au sens du théorème de la page 252. Si a est dans $C_1 + I'$, il est bien naturel de dire que les points de C_1 sont avant m , ceux de C_2 sont après; quant à ceux de I' , je ne vois pour l'instant aucun moyen de distinguer s'ils sont avant ou après m , mais il ne faut pas en conclure que cette distinction est impossible.

Remarquons que nous ne pouvons écarter le cas suivant: l'arc am est identique à ab par exemple. Alors m devra être dit, d'après notre définition, indifféremment avant ou après b . Cela montre que pour *certain*s points la définition sera contradictoire; nous la rejeterons naturellement pour ces points là, mais cela n'a qu'une importance secondaire car il n'en reste pas moins vrai que la notion d'ordre a un sens pour la majorité des points de l'arc et en second lieu que nous savons reconnaître ceux des points pour lesquels elle n'a pas de sens.

15. Nous allons dans ce qui suit donner un nouveau moyen de distinguer les points pour lesquels la définition n'est pas valable. Ces explications montreront le caractère de complexité que peut présenter un ensemble non irréductible simple.

Considérons d'abord un ensemble irréductible simple. Notre ensemble est irréductible entre a et b , soit c un point quelconque de l'ensemble. On peut,

par hypothèse, trouver deux continus C_1, C_2 ayant c seul en commun, dont la somme soit C , et séparément irréductibles entre a et c , b et c . C'est justement là la décomposition unique de l'ensemble C par le point c en trois ensembles: ceux que nous avons appelés C_1 et C_2 sont ceux qui ont actuellement le même nom, et l'ensemble Γ des points limites communs est réduit au point c . Cela résulte de ce que C_1 et C_2 sont bien enchaînés, ont c seul en commun, et, en outre, de ce que la décomposition n'est possible que d'une manière. Il y a donc, dans le cas de l'ensemble irréductible simple, identité entre la notion générale d'arc d'un ensemble irréductible et ce que nous avons déjà appelé arc.

Nous venons de voir que Γ est réduit à un point, le point c . Une question se pose. Est-ce là une propriété *caractéristique* d'un ensemble irréductible simple? Nous allons voir qu'il n'en est rien. Cela résultera simplement de l'étude qui va suivre.

16. Je me propose de montrer que la définition d'un ensemble irréductible simple peut être remplacée par la suivante. Un ensemble irréductible est irréductible simple, quand il ne renferme aucune portion continue qui soit irréductible de plusieurs façons, c'est à dire entre des couples de points différents.

Considérons un ensemble C irréductible d'une part entre les points a et b , d'autre part entre les points a et c , je dis qu'il ne peut pas être simple. Supposons en effet qu'il le soit. On peut alors trouver deux continus, l'un C_1 renfermant a et c , l'autre C_2 renfermant c et b , et ayant c seul en commun, dont la somme soit C . De plus chacun de ces continus est irréductible. Le continu C_1 portion de C contenant a et c est identique à C puisque C est irréductible entre a et c . Donc C_2 ne peut que se réduire au point c , ce qui est absurde puisque il contient b .

Soit maintenant un continu quelconque C irréductible entre a et b mais non simple. Décomposons-le au moyen du point c en trois ensembles C_1, Γ, C_2 . L'ensemble Γ peut être formé soit d'un, soit de plusieurs points. Supposons-le d'abord réduit à un point, qui est nécessairement le point c . Comme c est quelconque, si C_1 ou C_2 n'était pas réduit au seul point c , l'ensemble donné ne serait pas irréductible (raisonnement déjà fait). Si Γ et C_2 par exemple sont tous deux réduits au point c , nous sommes dans le cas exceptionnel, et on peut décomposer C en deux ensembles A et B , A étant bien enchaîné, B continu, et les points de B étant limites de ceux de A . Supposons a dans A et b dans B . Je dis que C est irréductible entre a et un point quelconque m de B . S'il ne l'était pas, il y aurait une *portion* continue de C contenant a et m ; cette portion ne pourrait comprendre tout A car alors elle comprendrait tout B . En lui

ajoutant B on obtient donc une portion de C continue, et contenant a et b , ce qui est absurde.

Supposons que Γ comprenne plus d'un point. Soit d un point de Γ autre que c . Décomposons encore C au moyen de c en trois ensembles C_1, Γ, C_2 , d est point limite commun de C_1 et de C_2 . On peut supposer que a est dans $C_1 + \Gamma$. Ajoutons le point d à l'ensemble C_1 et par compensation enlevons c de C_1 : cela n'altère pas l'ensemble somme $C_1 + \Gamma$. Faisons la même opération sur les ensembles C_2 et Γ . Soient C'_1, Γ', C'_2 ce que deviennent respectivement les trois ensembles: C'_1 et C'_2 sont restés bien enchainés et n'ont plus que d en commun, Γ' est toujours formé des points limites communs à C'_1 et C'_2 . Les ensembles C'_1, C'_2, Γ' réalisent donc la décomposition de C au moyen de d . Donc $C'_1 + \Gamma'$, c'est à dire $C_1 + \Gamma$, est irréductible entre a et d , comme il l'était déjà entre a et c . Il l'est donc de deux façons.

Pour qu'un ensemble soit irréductible simple il est donc bien nécessaire et suffisant que toute portion irréductible de cet ensemble le soit d'une seule manière.

Je vais montrer maintenant qu'étant donné un continu irréductible $C(ab)$ on peut toujours trouver dans ce continu des points m tels que l'arc am par exemple ne soit pas identique à C .

Traçons en effet de a comme centre un cercle γ laissant b à son extérieur (à ce cercle on peut substituer une aire fixe quelconque). Les points de C dans γ ne forment pas un continu. Mais l'ensemble C étant bien enchainé, considérons une chaîne à chaînons inférieurs à ε allant de a à b et prenons la première portion de cette chaîne (ligne de JORDAN simple) intérieure à γ jusqu'à sa première sortie de γ . Quand ε tend vers zéro, cette portion a évidemment pour ensemble limite un continu intérieur à γ qui est portion de C (portion seulement puisque C sort de γ). Si m est un point de ce continu ou bien C est irréductible entre a et m , ou bien il ne l'est pas mais contient une portion irréductible entre a et m . Cette portion irréductible est l'arc am et elle ne contient pas b ni d'ailleurs aucun point de C extérieur à γ .

Ce théorème montre que la notion d'ordre a un sens pour la plupart des points de C .

17. Je démontrerai en dernier lieu le théorème suivant:

Toute portion continue d'un continu irréductible est elle-même irréductible entre deux de ses points.

Soit C le continu donné, irréductible entre a et b , E une portion continue de C , m un point quelconque de C . Considérons l'ensemble des arcs am , et l'ensemble F des points communs à tous ces arcs. Soit de même G l'ensemble

des points communs à tous les arcs bm . Il est évident que les ensembles F et G sont fermés. Ils sont aussi continus, car si deux points α et β sont dans F , ils sont communs à tous les arcs am . Donc l'arc $\alpha\beta$ appartient aussi à tous les arcs am , et par suite à F . Donc F est bien enchaîné, donc continu.

Soit alors μ un point commun à F et E , π un point commun à G et à E . Il existe de tels points, car si E et F n'avaient aucun point commun, ils auraient un écart δ ; on pourrait enfermer F et G dans deux domaines sans point commun; l'arc am qui va d'un point du premier à un point du second aurait donc des points extérieurs au premier domaine, et un tel point appartenant à tous les arcs am appartiendrait à F , ce qui est contradictoire.

Ceci posé, F , qui contient μ , contient l'arc $a\mu$ et G contient l'arc $b\pi$. E contient une portion continue de C entre μ et π qui ne peut être que l'arc $\mu\pi$. Voyons si E peut contenir d'autres points situés par exemple sur l'arc $a\mu$. Soit m un de ces points, l'arc am contient μ ; puisque l'arc $a\mu$ contient aussi m , il s'ensuit que le point m appartient également à l'arc $\mu\pi$. En définitive E ne contient que des points appartenant à l'arc $\pi\mu$. Donc E est identique à $\pi\mu$, c'est à dire est irréductible.

Propriétés des lignes fermées.

18. Dans mon mémoire (M. p. 493), j'ai essayé de montrer que la frontière d'un domaine peut être considérée comme la somme de deux continus ayant deux points communs seulement. Ce résultat n'est pas exact d'une façon absolument générale. La démonstration n'est correcte que moyennant une hypothèse que j'ai utilisée sans la formuler explicitement. Cette hypothèse est la suivante:

Il faut qu'on puisse trouver deux points a, b sur la frontière C du domaine que l'on puisse joindre par une ligne irréductible *simple* entre les deux points a, b .

Cette question appelle de nouvelles recherches. Il y a lieu, par exemple, de se demander si cette hypothèse n'est pas vérifiée toutes les fois que le plan se trouve partagé en *deux* domaines seulement dont C est la frontière commune.

Je me propose dans ce paragraphe d'étudier la réciproque de cette propriété, c'est à dire rechercher ce qu'on pourrait appeler en analysis situs une «*ligne fermée*». Je crois qu'il sera possible de préciser les résultats que j'ai obtenus, mais il ne me semble pas inutile de les faire connaître dès maintenant.

Il sera assez naturel d'appeler ligne fermée la réunion de deux continus

ayant deux points communs a, b seulement et irréductibles entre ces deux points. On peut alors essayer de démontrer que cet ensemble partage le plan en deux domaines dont il est la frontière commune. Or, nous allons le voir sur un exemple, cet énoncé n'est pas exact et nous aurons seulement un énoncé plus restreint.

L'exemple que je vais donner est inspiré de celui par lequel M. BROUWER montre qu'un continu irréductible peut morceler le plan. Ce continu est formé d'une spirale enveloppant un cercle asymptote; il est irréductible entre l'origine de la spirale et un point quelconque du cercle. Mais il n'est pas irréductible d'une seule manière; la circonstance ne peut d'ailleurs pas se présenter lorsque le continu donné est irréductible *simple*; la démonstration de mon mémoire est en effet valable dans cette hypothèse.

Revenons à l'exemple indiqué. Soit un cercle de centre O et rayon un; et considérons un ensemble dénombrable d'arcs de cercle C_n tous concentriques au cercle donné et construits de la façon suivante. Le rayon de C_n sera $1 + \frac{1}{n}$; C_n est symétrique par rapport à l'axe des y , plus grand qu'une demi-cir-

conférence, et terminé sur les deux demi-droites d'argument $-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{n}$. Joignons l'origine du cercle C_n à celle du cercle C_{n-1} et son extrémité à celle du cercle C_{n+1} par des segments de droites; joignons l'extrémité libre du cercle C_2 à un point a de l'axe des y , d'ordonnée -2 par exemple, par une ligne (de JORDAN simple) quelconque ne croisant pas la ligne déjà construite. L'ensemble total obtenu est irréductible entre le point a et un point quelconque du cercle C ; il partage le plan en deux régions, comme dans l'exemple de M. BROUWER.

Considérons un deuxième ensemble simplement formé d'un segment de l'axe des y et allant de a au cercle C (point $x=0, y=-1$). Nous avons deux ensembles irréductibles ayant deux points communs seulement et le plan est partagé par eux en *trois régions* qui ont la même frontière.¹

On peut généraliser beaucoup cet exemple; il nous suffit pour mettre en défaut l'énoncé qui paraissait vraisemblable. En supposant les deux ensembles irréductibles simples, leur réunion forme une ligne de JORDAN simple fermée, et le théorème en question devient tout simplement le théorème de JORDAN bien connu.

19. Voici l'énoncé que j'ai pu obtenir qui généralise le théorème de JORDAN.

¹ Voir d'autres exemples dans la thèse de M. JANISZEWSKI. Voir aussi la note de M. DENJOY (C. R. t. 151 p. 138).

*La réunion de deux continus irréductibles entre deux points qui sont leurs seuls points communs partage le plan en deux aires cantorienne dont elle constitue l'ensemble des points frontières (c'est à dire non intérieurs). De plus ces aires cantorienne sont les ensembles limites de deux domaines d'un seul tenant.*¹

Soient E et E' les deux ensembles, a et b leurs points communs. Donnons nous un nombre ε et constituons entre a et b sur E et sur E' deux chaînes de chaînons inférieurs à ε dont les sommets sont sur l'ensemble. Ces deux chaînes sont des lignes de M. JORDAN. Je dis qu'on peut les supposer *simples*, c'est à dire ne se coupant pas. Supposons en effet que, quelque petit que soit ε , elles se coupent en un point m . Il y aurait une infinité de points m , donc un point limite au moins. Un tel point limite, infiniment voisin de points de E et de points de E' appartient à E et à E' qui sont fermés; ce ne peut donc être que a ou b , a par exemple. Alors à partir d'une certaine valeur de ε , les points m se trouveront dans un cercle donné de centre a . Mais on peut éviter cela en prenant pour point de départ des deux chaînes au lieu du point a (ou du point b) un point de E et un point de E' extérieurs à ce cercle ou sur sa circonférence, et en allant de chacun de ces points à a par un segment de droite. On pourra sur cette chaîne supposer les chaînons assez petits pour qu'elle ne se coupe pas elle-même. La chaîne totale est à chaînons inférieurs à un nombre qui tend vers zéro avec ε et que nous appellerons aussi ε . Elle constitue une ligne de JORDAN simple fermée, elle divise donc le plan en deux domaines D_ε , D'_ε (j'appelle D'_ε le domaine extérieur).

Faisons tendre ε vers zéro; ces deux domaines sont des continus qui ont des *continus limites*, appelons-les D , D' . On peut faire alors les remarques suivantes:

1:0. Tout point du plan appartient soit à D , soit à D' , soit aux deux ensembles à la fois;

¹ Cette dernière propriété appartient d'ailleurs à toute aire cantorienne. Soit en effet un continu quelconque C au sens de CANTOR (avec ou sans point intérieur). Considérons l'ensemble des points dont l'écart à C est inférieur (sens étroit) à ε . Cet ensemble forme un domaine au sens habituel de ce mot, c'est un ensemble qui comprend C et qui ne comprend que des points intérieurs (il est dense en lui-même et non fermé, comme le domaine d'existence d'une fonction analytique uniforme par exemple). Ce domaine a visiblement C pour ensemble limite quand ε tend vers zéro. Pour voir qu'il est d'un seul tenant, il suffit de démontrer qu'on peut en joindre deux points par un trait continu sans sortir de D . Cela est presque évident: soient a et b deux points de D . Dans le cercle de centre a et de rayon ε il y a un point m de C au moins; de même dans le cercle de centre b et de rayon ε il y a un point p de C au moins. On peut de plus aller de m en p par une chaîne à chaînons inférieurs à ε dont les sommets sont sur C . Le chemin (ligne brisée) constitué par cette chaîne, et par les deux segments am et bp est entièrement dans D , ce qui démontre le théorème.

2:0. Un point commun à D et à D' est infiniment voisin à la fois de points intérieurs à D_ε et de points intérieurs à D'_ε . Cela est impossible si son écart à l'un des ensembles E ou E' n'est pas nul (cela est à peu près évident). Donc les points communs à D et à D' ne sont que des points de E ou E' , ce qui démontre notamment que D et D' n'ont aucun point intérieur commun;

3:0. La frontière commune de D et de D' se compose donc d'un ensemble continu, portion de E et de E' . D'autre part cette frontière comprend tous les points de E et tous les points de E' . Ceci démontre donc le théorème.

20. Je reviens sur les détails de la démonstration.

Considérons un point quelconque m du plan. Quel que soit ε il appartient soit à D_ε soit à D'_ε . Alors deux hypothèses peuvent être faites.

1:0. Quel que soit ε , le point m appartient soit toujours à D_ε soit toujours à D'_ε ; il appartient alors dans le premier cas à D (et peut être à D'), dans le second à D' (et peut-être à D).

2:0. Quel que soit ε il y a des valeurs plus petites de ε telles que m appartienne à D_ε et d'autres également telles qu'il appartienne à D'_ε . Alors m est limite des deux: il est certainement commun à D et à D' .

Cherchons maintenant dans quelles conditions le point m peut être commun à D et à D' . Appelons L_ε la ligne de JORDAN constituée au moyen de la valeur donnée à ε . Remarquons que tout point de cette ligne est à une distance de $E + E'$ inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit m un point commun à D et à D' . Si quel que soit ε il appartient à des lignes L_ε , le point m est sur $E + E'$. Supposons donc qu'il n'appartienne plus à aucune des lignes L_ε à partir d'une valeur de ε , et qu'il n'appartienne pas non plus à l'ensemble limite de ces lignes (auquel cas il serait encore sur $E + E'$). On peut donc trouver un cercle de centre m et de rayon η dans lequel les lignes L_ε ne pénètrent plus pour ε assez petit. L'ensemble $E + E'$ ne pénètre pas non plus dans le même cercle. Supposons que m appartienne quel que soit ε à D_ε : dans son voisinage il doit y avoir des points de certains D'_ε , notamment il doit y en avoir dans le cercle de rayon η . Dans le même cercle il y a donc des points de L_ε . Supposons au contraire que m appartienne tantôt à D_ε tantôt à D'_ε : la conclusion sera la même, car si m appartient par exemple pour une certaine valeur de ε à D_ε , il y a dans son voisinage des points de D'_ε ($\varepsilon' < \varepsilon$) sans qu'il soit lui-même dans D'_ε , il y a donc dans ce même voisinage des points de L_ε , ce qui est contradictoire.

En dernier lieu, il reste à examiner le point suivant: tout point de E (ou de E') est un point commun à E ou E' , et par suite, un point frontière com-

mun. En effet, chacune des deux lignes de JORDAN construites au début de la démonstration a un ensemble limite qui est continu, il comprend a et b et ne comprend que des points de E (ou de E'); cet ensemble limite se confond donc avec E (ou avec E') et par suite, tout point de E (ou de E') appartient à la fois à D et à D' .

Les propriétés qui précèdent permettent comme on le voit d'introduire dans les raisonnements géométriques le concept de courbe fermée: la seule restriction apportée par le mot irréductible à la définition cantorienne est suffisante pour que la ligne fermée jouisse dans une certaine mesure des propriétés que nous exigeons par notre conception vulgaire de ligne fermée.

Tangente.

21. Je me propose maintenant de définir la tangente en un point m d'un continu irréductible E . Soit p un point de l'arc am par exemple. Joignons le point m à tous les points de l'arc pm . Considérons l'ensemble des angles que font avec une droite fixe les droites obtenues. Soit E_p cet ensemble de nombres que nous porterons en abscisses sur une droite quelconque. Il est certainement dense en lui-même, mais il n'est pas fermé. Ajoutons lui son dérivé E'_p , et posons $F_p = E_p + E'_p$. L'ensemble nouveau F_p est fermé et dense en lui-même. Je vais montrer qu'il est bien enchaîné, il en résultera qu'il est continu.

Il suffit évidemment de montrer que E_p est bien enchaîné, car entre deux points de F_p appartenant l'un ou l'autre ou tous deux à E_p on pourra substituer deux points voisins de E_p et établir une chaîne entre ces deux derniers.

Soient donc deux nombres pris dans E_p . À ces nombres correspondent deux points de pm , soient q et r tels que les droites mq et mr font avec l'axe des x un angle égal à l'un de ces nombres. Considérons l'arc qr : s'il ne contient pas le point m , le point m est à une certaine distance ϱ de cet arc. Si l'on veut construire dans E_p une chaîne à chaînons inférieurs à ε , il suffira de prendre dans l'arc qr des points à des distances relatives inférieures à $\varrho\varepsilon$, ce qui est possible puisque qr est continu. Dans le cas particulier où m appartiendrait à l'arc qr , c'est à dire, comme on le voit aisément, dans le cas où les arcs qm , rm , qr seraient les mêmes, on pourrait substituer aux points q ou r ou aux deux, des points voisins q_1 , r_1 , tels que m ne soit pas sur l'arc q_1r_1 : la démonstration précédente subsiste donc.

Substituons alors au point p du début un autre point de l'arc pm . L'ensemble E_p diminue (ou au moins n'augmente pas). Il en est donc de même de E'_p et par suite de F_p . Faisons tendre le point p vers le point m sur l'arc pm ; l'ensemble continu F_p a un ensemble limite, F , qui, naturellement, est continu (puisque les ensembles F_p vont en se réduisant sans cesse). Toute droite passant par m et qui fera avec l'axe des x un angle égal à un des nombres de F sera dite une tangente à l'ensemble au point m .

22. Examinons les différents cas possibles. D'abord, suivant qu'on prend le point p initial sur l'arc am ou sur l'arc bm , les ensembles F obtenus ne sont pas les mêmes. Alors le cas le plus simple est celui où ces deux ensembles sont les mêmes et réduits tous deux à un point. On dira dans ce cas qu'il y a une tangente unique à la ligne au point m .

Supposons que les deux ensembles F soient encore réduits à un point, mais les deux points étant différents. Il y aura alors deux tangentes au point m (une à droite, et une à gauche).

Enfin si l'un des deux F (ou tous deux) n'est pas réduit à un point, il existe au point m soit un, soit deux angles se recouvrant partiellement, totalement ou pas du tout, et dont toute droite est tangente à l'ensemble.

Voyons de plus près ce que signifie pour une droite D la condition d'être tangente à E au point m . Deux cas sont possibles: ou bien il existe sur D une infinité de points de l'ensemble dont m est un point limite; si l'on veut, l'intersection de D avec E , qui est un ensemble fermé, doit comprendre m comme point limite. Le cas actuel est celui de la droite Ox pour la courbe $y = x \sin \frac{1}{x}$.

Supposons au contraire que le point m ne soit pas point limite de l'intersection des ensembles D et E . Alors ou bien il y a sur D des points éloignés de m mais appartenant à l'arc pm dont les extrémités sont infiniment voisines; ou bien il y a simplement au voisinage de m des points de E tels que les droites qui le joignent au point m soient infiniment voisines de D . Dans ce dernier cas la droite D jouit bien de la propriété habituelle de la tangente d'être position limite d'une sécante. Il ne me semble pas que, pour définir la tangente, il faille écarter les deux autres cas, si l'on veut conserver le bénéfice d'un ensemble continu de tangentes.

J'ajoute que pour une droite donné D plusieurs des cas précédents peuvent se présenter simultanément.

23. Après avoir examiné les différentes possibilités je vais montrer que le cas d'une tangente unique (ou double) en chaque point n'est pas compatible

avec la définition d'un ensemble non simple. On pourrait donc se borner pour la définition de la tangente aux lignes de JORDAN. Il serait facile alors de voir qu'il y a identité entre les définitions précédentes et celle des nombres dérivés et que l'existence d'une tangente unique (ou double) revient à l'existence d'une dérivée (ou d'une dérivée à droite et d'une dérivée à gauche).

Il s'agit donc de montrer que si un ensemble n'est pas irréductible simple, en un point au moins, il admet une infinité de tangentes. Il suffit évidemment de réduire l'ensemble donné à un ensemble E irréductible à la fois entre les deux points a, b , et entre les deux points a et c . Soit m un point de E ; nous savons déjà que

$$\text{arc } ac = \text{arc } ab = E;$$

considérons les arcs mb, mc . Comme on a

$$ac = am + mc$$

$$ab = am + mb$$

il en résulte

$$am + mc \equiv am + mb$$

ce qui entraîne, ou bien que $mc \equiv mb$, ou bien que $am \equiv ac$, comme c'est à peu près évident. Dans le premier cas, les arcs identiques mc et mb ont pour limites, quand m tend vers c par exemple, des continus qui, contenant b et c ne se réduisent pas à un point. On peut écarter le second cas qui ne se présente pas pour tous les points m voisins de c par exemple.

Soit alors un point d du continu limite de mc . On peut faire passer par d une infinité de droites D qui passent également entre les points voisins de c et les points voisins de b . Or ce sont là des points appartenant à l'arc mc et à l'arc mb , c'est à dire au même arc, et cet arc étant continu rencontre D . Il y a donc sur D une infinité de points de l'arc mc (qui n'est autre que l'arc md). Donc D est une tangente en d , il y en a donc une infinité.

Extension à l'espace de la définition cantorienne.

24. J'ai, dans une note du mémoire déjà cité (M., 489 note 2), énoncé et utilisé la propriété suivante: Etant donné un point c d'une ligne cantorienne on peut, parmi les droites issues de c en trouver une au moins qui n'admette pas avec l'ensemble un ensemble continu de points communs comprenant c . Cette pro-

priété n'était pas par moi considérée comme évidente. Je voyais simplement la démonstration sans l'avoir, je l'avoue, cherchée dans tous ses détails. Je suis revenu sur cette démonstration, qui n'est pas aussi simple que je pensais d'abord. Je vais la donner ci-dessous: elle a pris à mes yeux une importance assez grande quand je me suis aperçu d'abord qu'elle caractérisait les lignes cantorienne, en les distinguant des aires, et en second lieu qu'elle fournit un moyen d'étendre à l'espace les définitions de M. CANTOR.

Considérons donc un continu linéaire *quelconque* E . Supposons que toutes les droites issues d'un point m de l'ensemble aient en commun avec lui un continu comprenant m . Soit φ l'angle que fait une droite passant par m avec l'axe des x (une droite quelconque) et soit $r(\varphi)$ la longueur de l'ensemble continu commun à l'ensemble E et à la droite. Les nombres positifs $r(\varphi)$ forment un ensemble.

Supposons d'abord que la limite inférieure des nombres $r(\varphi)$ ne soit pas nulle. Soit ϱ cette limite. Il en résulte que le cercle de centre m et de rayon ϱ a tous ses points sur E . Donc E n'est pas linéaire. On voit de même que si la limite inférieure de nombres $r(\varphi)$ relatifs aux valeurs de φ dans un intervalle quelconque α, β n'était pas nulle, l'ensemble E comprendrait tous les points d'un secteur, c'est à dire une aire.

En résumé la fonction $r(\varphi)$ jouit des propriétés suivantes 1:0 elle n'est jamais nulle, 2:0 sa limite inférieure est nulle dans tout intervalle.

Associons maintenant une infinité de valeurs de φ tendant vers φ_0 . Soit $r_0 = r(\varphi_0)$. Je dis que r_0 est la plus grande limite des valeurs de r relatives à ces valeurs de φ . Cela est évident, car cette plus grande limite d'abord est au moins égale à r_0 et de plus ne peut être plus grande que r_0 , car si elle avait une valeur $r_1 > r_0$ tous les points de la droite φ_0 à une distance inférieure à r_1 de m seraient points de E comme limites de points de E .

Considérons maintenant l'ensemble des valeurs de φ pour lesquelles le nombre $r(\varphi)$ dépasse un nombre donné ϱ . D'après la propriété que je viens de démontrer, cet ensemble, G_1 , est *fermé*. Considérons de même l'ensemble des valeurs de φ , s'il en existe, où $r(\varphi)$ est compris entre ϱ et $\frac{\varrho}{2}$. Cet ensemble est fermé, tout au moins si l'on lui ajoute son dérivé, mais cette opération ne risque d'introduire que des éléments figurant déjà dans G_1 : nous les compterons deux fois. Soit G_2 ce nouvel ensemble. Recommençons en remplaçant ϱ et $\frac{\varrho}{2}$ par $\frac{\varrho}{2}$ et $\frac{\varrho}{4}$ et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une succession d'ensembles $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$.

Une valeur quelconque de φ figurera certainement dans l'un des ensembles,

car si r est la valeur correspondante de $r(q)$, on finira par avoir $r > \frac{\varrho}{2^n}$. Il en résulte que l'ensemble de toutes les valeurs de q , c'est à dire l'ensemble $0-2\pi$ de l'axe des x qui est continu, est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés (le fait que ces ensembles ont des points communs ne modifie pas la conclusion). L'un de ces ensembles au moins doit donc renfermer des portions continues d'après un théorème que j'ai démontré dans ma thèse.¹ Il y a donc un intervalle α, β tel que q variant entre α et β , $r(q)$ est supérieur à un nombre fixe; ce qui est contradiction avec la propriété 2.

On voit que d'après la démonstration même, non seulement il y a des droites issues de m n'ayant pas avec E un continu commun, mais il y en a dans tout intervalle: autrement dit l'ensemble de ces droites (ou des angles qu'elles font avec une droite fixe) est dense (dense sur $0-2\pi$).

Considérons maintenant une aire cantorienne: Il est évident qu'il y a des points — les points intérieurs — tels que toutes les droites issues de ces points ont avec l'ensemble un continu commun. Pour qu'un continu soit linéaire, il est donc nécessaire et suffisant qu'en tous ses points il existe au moins une droite n'ayant pas avec l'ensemble un continu commun. En d'autres termes, ce critérium est *entièrement équivalent* au critérium de l'existence des points intérieurs par lequel M. CANTOR distingue les lignes et les aires.

Remarquons qu'en *certain*s points d'une aire, des droites n'ayant pas de continu commun avec l'ensemble peuvent exister dans tout intervalle.

25. Le critérium précédent n'a visiblement pas sur celui de M. CANTOR l'avantage de la simplicité. Mais il a celui de pouvoir être étendu à l'espace.

En effet dans l'espace ordinaire à trois dimensions la définition d'un ensemble continu s'applique, de même que la définition de l'ensemble continu irréductible, et la plupart des propriétés de ces ensembles examinées dans mes deux Mémoires. La définition de la ligne cantorienne ne s'applique pas, car dire que dans un continu il n'y a pas de point intérieur, entraîne simplement qu'il n'est pas un *volume*, c'est à dire une portion d'espace. Mais les définitions de M. CANTOR sont insuffisantes pour distinguer une *ligne* d'une *surface*. Comme nous l'avons vu plus haut, il en est de même de la notion de ligne irréductible.

Cette distinction est au contraire fournie en transportant dans l'espace la définition donnée au paragraphe précédent. Je dirai qu'un continu à trois dimensions est une ligne, si en chacun de ses points on peut trouver un plan au moins qui n'a pas avec l'ensemble un continu commun. Dans le cas contraire,

¹ Journal de M. JORDAN 1905.

l'ensemble sera une surface si en chaque point il existe des droites n'ayant pas avec l'ensemble un continu commun, un volume dans le cas contraire.

Les définitions précédentes ont des conséquences immédiates. D'abord un ensemble qui a des points intérieurs est un volume, et inversement, comme on le voit par une démonstration analogue à celle donnée dans le cas du plan. En second lieu, tout ensemble situé dans un plan est une aire ou une ligne, et dans ce cas particulier les définitions de ces mots données dans le cas de l'espace se réduisent aux définitions données plus haut dans le cas du plan.

Un continu irréductible entre a et b dans l'espace n'est certainement pas un volume, car on pourrait enlever toute une sphère de points de l'ensemble sans qu'il cesse d'être continu et de contenir les deux points a et b . Nous avons vu plus haut qu'un continu irréductible peut comprendre une aire.

Grenoble, 11 juillet 1910.

QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS DÉTERMINANTES.

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNA.

Je présente dans cette note quelques remarques simples et élémentaires qui complètent en quelques parties, je pense, la théorie des fonctions déterminantes, théorie dont l'importance a été reconnue depuis longtemps, et qui devient encore plus intéressante à cause des travaux parus dernièrement sur la série de DIRICHLET.

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle ou complexe de la variable réelle, limitée et intégrable dans chaque intervalle fini entre c et $+\infty$. Étudions l'intégrale

$$\int_c^\infty \varphi(t) e^{-tx} dt. \quad (1)$$

Rappelons quelques résultats connus qui se rapportent à l'expression (1). Si la (1) est convergente pour une valeur $x = x_0$ elle est aussi convergente pour chaque valeur x dont la partie réelle est plus grande que la partie réelle de x_0 , c'est à dire, selon une notation très connue, si l'on a

$$R(x) > R(x_0).$$

Il s'ensuit l'existence d'un demiplan de convergence pour (1), c'est à dire d'un nombre a tel que la (1) converge pour $R(x) > a$, tandis qu'elle ne converge pas pour $R(x) < a$. Sur la droite de convergence $R(x) = a$ on ne peut affirmer en général ni la convergence ni la divergence. On appellera le nombre a *abscisse de convergence* pour l'expression (1), ou bien *ordre* de la fonction $\varphi(t)$. Ce nombre

a peut être $-\infty$, en ce cas la (1) est convergente dans tout le plan x ; a peut être $+\infty$, alors la (1) n'est jamais convergente. Dans le demiplan $R(x) > a$, à l'exception au plus de la droite de convergence, la (1) représente une branche à une seule valeur d'une fonction analytique, régulière dans chaque région finie du demiplan. Cette fonction analytique $f(x)$, qui peut être quelque fois continuée à gauche de la droite de convergence, est appelée *fonction déterminante* de $\varphi(t)$, et celle-ci s'appelle *fonction génératrice* de $f(x)$. Pour indiquer la correspondance fonctionnelle entre $f(x)$ et $\varphi(t)$ j'écrirai quelque fois:

$$f(x) = J(\varphi). \quad (2)$$

Nous laissons de côté quelques généralisations évidentes, entre autres celle que $\varphi(t)$ puisse être donnée, plutôt que sur un segment infini de l'axe réel t , sur une ligne qui s'étend à l'infini dans le plan de la variable t , sous des conditions analogues à celles que nous avons énoncées.¹

2. Entre beaucoup de questions qui se présentent dans l'étude de l'expression (1), il y a celle de la détermination de l'ordre a de $\varphi(t)$. LANDAU [G. p. 215] a énoncé le théorème suivant:

Si $a \geq 0$ on a:

$$a = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_c^t \varphi(u) du \right|}{t}, \quad (3)$$

où $\overline{\lim}$ représente le *maximum* des limites dans le sens bien connu de CAUCHY et HADAMARD.

Je vais montrer comme on peut faire correspondre au théorème de LANDAU un autre analogue pour le cas $a < 0$. Dans ce cas on a:

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_t^x \varphi(u) du \right|}{t}. \quad (4)$$

La démonstration est analogue à celle de LANDAU.

Soit $-\beta$ le maximum des limites dans le second membre de (4), et soit $x > -\beta + \varepsilon'$ (ε' positif); je dis que la (1) est convergente pour cette valeur de x . Soit $\varepsilon < \varepsilon'$; il existe un \bar{t} tel que, pour $t > \bar{t}$, on aura

¹ Voir mon mémoire »Sur les fonctions déterminantes» Ann. de l'École Normale (3) XXII (1905) p. 9 (qui sera indiqué par D); E. LANDAU »Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen» Sitzungsber. der K. Bay. Akad. der Wssts XXXVI (1906) p. 208 (qui sera indiqué par G); W. SCHNEE »Inaug. Dissert.» Berlin 1908 (imprimé à Göttingen, Dict. Un. Buchdruc.) p. 59.

$$\left| \int_v^t \varphi(u) du \right| < e^{-t(\beta-t)}; \quad (5)$$

si $t < v < w$, en posant

$$I = \int_v^w \varphi(t) e^{t(\beta-t')} dt, \quad \int_v^t \varphi(u) du = \varrho(t), \quad (6)$$

on déduit, par une intégration par parties,

$$I = \varrho(w) e^{w(\beta-t')} - \varrho(v) e^{v(\beta-t')} - (\beta - t') \int_v^w \varrho(t) e^{t(\beta-t')} dt.$$

Dans le second membre de cette expression les deux premiers termes sont, en valeurs absolues, plus petits que $e^{-w(t'-t)}$ et $e^{-v(t'-t)}$, tandis que le troisième est plus petit que

$$(\beta - t') \int_v^w e^{-t(t'-t)} dt,$$

on peut donc les rendre, pour v suffisamment grand, aussi petits que l'on voudra. La (1) est donc convergente pour $R(x) > -\beta$.

Inversement, soit (1) convergente pour une valeur négative $-y$ de x . On peut, fixé d'avance σ , déterminer un nombre t tel que, pour $t < v < w$, l'on ait

$$\left| \int_v^w \varphi(t) e^{ty} dt \right| < \sigma.$$

Puisque $\varrho(t)$ est convergente, je forme

$$H = \int_v^w \varphi(t) dt = \int_v^w \varphi(t) e^{ty} \cdot e^{-ty} dt;$$

en posant

$$f(-y, t) = \int_v^t \varphi(u) e^{uy} du,$$

on déduit, par une intégration par parties,

$$H = \left[f(-y, t) e^{-ty} \right]_v^w + y \int_v^w f(-y, t) e^{-ty} dt.$$

A cause de la convergence de $f(-y)$ il existe un nombre positif B tel que, pour chaque t , $|f(-y, t)| < B$; donc

$$|H| < 2B(e^{-wy} + e^{-vy}).$$

En faisant tendre w vers l'infini, on déduit

$$\left| \int_v^{\infty} q(t) dt \right| < 2B e^{-vy},$$

et de là

$$\log \left| \int_v^{\infty} q(t) dt \right| < -y.$$

Il en résulte donc que $-y$ n'est pas inférieur à $-\beta$; et puisque la (1) est convergente pour $R(x) > -\beta$ et n'est pas convergente pour $R(x) < -\beta$, il s'ensuit que $-\beta$ est l'abscisse de convergence.

3. Parmi les questions auxquelles donne lieu la correspondance fonctionnelle (2), l'une des plus intéressantes est celle qui met en rapport le caractère asymptotique de la fonction génératrice pour $t = \infty$ avec le caractère analytique de la fonction déterminante, en particulier quant à la position et à la nature de ses singularités. Il y a peu de théorèmes sur ce sujet. Nous rappellerons les théorèmes des nos 10, 11, 17 du Mémoire D, le théorème X''' à la page 217 du Mémoire G et les propositions énoncées aux pag. 69—71 de la dissertation de W. SCHNEE. Au même côté de la question se rattachent étroitement quelques propositions sur la série de DIRICHLET.¹

La proposition suivante sur le même sujet, quoique très élémentaire, a des conséquences utiles. C'est à cause de cela que je l'énonce explicitement.

»Soit $\gamma(t)$ une fonction génératrice d'ordre zéro, donnée pour $t \geq c$, et positive; sa fonction déterminante $q(x)$ soit telle que pour $|x| < r$

$$|q(x)x^\varrho| < A, \tag{7}$$

A et ϱ étant des nombres positifs. Soit $\omega(t)$ une fonction limitée et intégrable entre c et ∞ qui tend à zéro pour $t = \infty$. Alors la fonction

¹ V. LANDAU, Acta XXX (1905) p. 195 (où l'on trouve citées aussi les recherches antérieures de DIRICHLET et PHRAGMÉN). SCHNEE l. c. p. 34 id. Rend. Cir. Mat. di Palermo XXVII (1909) p. 87.

$$f(x) = \int_c^{\infty} \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt, \quad (8)$$

lorsque $x = \xi + i\eta$ reste dans un angle V dont le sommet est zéro, qui contient l'axe réel positif et dans lequel $\frac{\eta}{\xi}$ ne dépasse pas en valeur absolue un nombre positif m , donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^q f(x) = 0.$$

Observons d'abord que, puisque $\gamma(t)$ est positive, $q(x)$ admet, d'après un théorème de LANDAU¹, un point singulier pour $x = 0$. Cela posé, qu'on prenne un nombre positif ε , que l'on fixe u de manière que pour $t \geq u$ soit

$$|\omega(t)| < \sigma, \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{3A\sqrt{1+m^2}} \quad (9)$$

et que l'on décompose (8) en

$$f(x) = \int_c^u \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt + \int_u^{\infty} \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt.$$

La première intégrale est une fonction entière de x , inférieure donc en valeur absolue, pour $|x| < r$, à un nombre M qu'on peut fixer. La seconde intégrale donne

$$\left| \int_u^{\infty} \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt \right| < \sigma \int_u^{\infty} \gamma(t) e^{-t\xi} dt,$$

avec

$$\int_u^{\infty} \gamma(t) e^{-t\xi} dt = q(\xi) - g(\xi),$$

et $g(\xi)$ est aussi une fonction entière, inférieure en valeur absolue, pour $\xi < r$, à un nombre N qu'on peut fixer.

De sorte que pour $|x| < r$ on a,

$$|f(x)x| < M|x|^q + \sigma q(\xi) \xi^q \left(\frac{|x|}{\xi} \right)^q + \sigma N|x|^q;$$

mais on a, puisque x est dans l'angle V ,

¹ G. p. 217 (déjà donné par l'auteur dans Math. Ann. LXI (1905) p. 548).

$$\frac{|x|}{\varepsilon} < V\sqrt{1+m^2},$$

d'où, à cause de (7) et (9),

$$|f(x)x^g| < M|x|^g + \frac{\varepsilon}{3} + \sigma N|x|^g.$$

En prenant $|x|$ moindre que le plus petit des trois nombres

$$\varepsilon, \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^{\frac{1}{g}}, \left(\frac{1}{N}\sqrt{1+m^2}\right)^{\frac{1}{g}}$$

on aura

$$|f(x)x^g| < \varepsilon.$$

En multipliant $\gamma(t)$ par $\omega(t)$, qui tend à zéro pour $t = \infty$, on abaisse donc, pour ainsi dire, l'infini de $q(x)$ pour $x = 0$. On pourrait faire disparaître tout à fait la singularité si $\omega(t)$ tendait à zéro d'ordre exponentiel.

4. a). Si $\varphi(t)$ est donné avec les conditions du n° 1 entre $t = 0$ et l'infini positif, envisageons sa déterminante

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-tx} dt; \quad (10)$$

supposons que x se trouve à l'intérieur d'un angle V dont le sommet soit un point c du demiplan de convergence de $f(x)$, et dont les côtés aient respectivement les arguments $-\frac{\pi}{2} + \eta$ et $\frac{\pi}{2} - \eta$, $(0 < \eta < \frac{\pi}{2})$. On peut sans aucun inconvénient supposer c réel. Dans tout l'intérieur de l'angle V la fonction analytique $f(x)$ est, en valeur absolue, moindre qu'un nombre m qu'on peut fixer [D, n° 12]; si donc on conduit une demidroite partant du point c , dont l'argument soit ϑ , contenue dans l'angle V , et si, par une intégration le long de cette demidroite, on forme

$$F_\vartheta(z) = \int_c^\infty e^{i\vartheta} f(x) e^{-zx} dx, \quad (11)$$

$f(x)$ sera dans cette expression une fonction génératrice d'ordre zéro et sa déterminante $F_\vartheta(z)$ sera une fonction analytique régulière dans le demiplan S_ϑ ,

en avant d'une perpendiculaire conduite par l'origine à la direction dont l'argument est $-\vartheta$.¹

Lorsque ϑ varie de $-\frac{\pi}{2} + \eta$ à $\frac{\pi}{2} - \eta$ dans le sens des rotations positives, le demiplan S_ϑ tournera dans le sens contraire et couvrira tout le plan z , sauf un angle dont l'amplitude est 2η et dont l'axe réel négatif est la bisectrice. Appelons T l'aire ainsi formée dans le plan z .

«La (II) donne la définition d'une branche de fonction analytique à une seule valeur, qu'on peut prolonger dans toute l'aire T ainsi définie.» En effet envisageons deux demidroites partant du point c , dont les directions soient α et β , avec

$$-\frac{\pi}{2} + \eta < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} + \eta;$$

après avoir tracé le cercle de rayon R , nous intégrons $f(x)e^{-zx}$ sur le contour du secteur compris entre la circonférence et les deux rayons α et β . L'application du théorème de CAUCHY et le passage à la limite pour $R = \infty$ montrent sans aucune difficulté, puisque $|f(x)| < m$, que

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z),$$

de sorte que, dans les parties non communes des demiplans, l'une de ces expressions est la continuation analytique de l'autre. On a défini ainsi une branche à une seule valeur de fonction analytique $F(z)$ dans toute l'aire T .

Mais puisque l'angle η est aussi petit que l'on veut, on peut conclure que

«la déterminante $F(z)$ de la déterminante d'une fonction $\varphi(t)$ donnée entre 0 et ∞ avec les conditions du n° 1, est une fonction analytique qui a une branche à une seule valeur régulière dans tout le plan z sauf une coupure faite le long de l'axe réel positif.»

Dans le cas où la (10) a un demiplan de convergence absolue, on prendra dans le plan z le point c sur l'axe réel; on pourra alors intervertir les intégrations dans l'expression de $F(z)$,

$$F(z) = \int_c^\infty \int_0^\infty e^{-xz} e^{-tx} \varphi(t) dt dx$$

et on aura ainsi, sous la condition $R(t+z) > 0$,

¹ Voir mon mémoire «Sur l'inversion des intégrales définies, Mem. de la Société des XL (3) XV (Rome, 1909) p. 15. Avec un demiplan S_ϑ en avant de la droite qui le limite, j'entends le demiplan dans lequel les segments, comptés à partir de l'origine sur la demidroite dont l'argument est $-\vartheta$, croissent indéfiniment.

$$F(z) = e^{-iz} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) e^{-it}}{t - z} dt;$$

celle-ci représente dans tout le plan z , sauf une coupure le long de l'axe réel négatif, une branche à une seule valeur de fonction analytique. D'après un théorème connu¹, $2\pi i \varphi(-t)$ représente le saut de cette fonction à travers la coupure.

b). Les fonctions régulières dans l'entourage de $x = \infty$ appartiennent à la classe des fonctions déterminantes, et leurs génératrices sont des fonctions entières d'ordre 1 au plus. Si la fonction déterminante est représentée par

$$f(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}} \quad (13)$$

convergente pour $|x| > r$, la génératrice est donnée par

$$\varphi(t) = \sum \frac{k_n t^n}{n!}, \quad (14)$$

et réciproquement, si la fonction (14) est donnée sous la condition

$$|k_n| < m(r + \varepsilon)^n,$$

m, r positifs et ε aussi petit que l'on veut, la déterminante est régulière dans l'entourage $|x| > r$ de l'infini.

Remarquons, comme parenthèse, que si $s(x)$ est une série de DIRICHLET, $\frac{s(x)}{x}$ est une fonction déterminante d'une génératrice discontinue et ne peut pas être régulière pour $x = \infty$.²

Supposons maintenant qu'on ait dans la série (14)

$$k_n = (-1)^n \int_0^a \delta(u) u^n du, \quad (15)$$

on aura aussi

$$\varphi(t) = \int_0^a \delta(u) e^{-tu} du \quad (16)$$

¹ V. p. ex. Hermite, Cours lith. d'Analyse de 1891 p. 155.

² On a ainsi la vérification d'une remarque faite par HURWITZ et rappelée par LANDAU. Rend. du Circ. Mat. di Palermo XXIV (1907) p. 132.

et alors, d'après le n° 4, $f(x)$ appartiendra à la classe des fonctions déterminantes de déterminantes et sera régulière dans tout le plan, sauf une coupure le long de l'axe réel négatif, qui dans ce cas est limitée au segment $-a \dots 0$. Si nous envisageons comme résolu le problème de déterminer la génératrice d'une fonction déterminante donnée, on aura donc résolu aussi le problème de déterminer le saut d'une telle fonction $f(x)$ à travers la coupure, et puisque ce saut est donné par la fonction qui permet de donner aux coefficients k_n la forme (15), on a résolu aussi pour ceux-ci le problème connu des *moments*.

c). Soit $\omega(t)$ une fonction périodique avec la période a , intégrable entre 0 et a et limitée pour tous les points entre 0 et a . Elle sera donc limitée entre 0 et ∞ et sera ainsi une génératrice d'ordre 0. Sa déterminante

$$h(x) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-tx} dt$$

est régulière pour $R(x) > 0$. Mais on a, à cause de la périodicité,

$$h(x) = \int_0^a \omega(t) e^{-tx} dt + \int_0^a \omega(t) e^{-(t+a)x} dt.$$

La première intégrale est une fonction entière $g(x)$, donc

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-ax}}. \quad (17)$$

La déterminante d'une fonction périodique est donc une fonction méromorphe et le numérateur est une fonction entière de la forme (16).

Réciproquement, il est facile de vérifier que toute fonction de la forme (17) est la déterminante d'une fonction périodique.

d). Aux fonctions déterminantes de déterminantes se rattachent les déterminantes des séries de DIRICHLET

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha_n t}. \quad (18)$$

Si les α_n sont des nombres positifs croissants et tendant à l'infini et si la série a un demi-plan de convergence absolue, si c est un nombre réel dans ce demi-plan, en prenant un nombre positif quelconque ε , on peut choisir un nombre m tel que

$$\sum_{n=m}^{\infty} |c_n e^{-a_n c}| < \varepsilon,$$

et a fortiori $|p(t)| < \varepsilon$ pour $t > c$, si

$$p(t) = \sum_m c_n e^{-a_n t}.$$

Soit

$$f(x) = \int_c^{\infty} q(t) e^{-tx} dt;$$

on déduit

$$f(x) = e^{-cx} \sum_1^{m-1} \frac{c_n e^{-c a_n}}{x + a_n} + \int_c^{\infty} q(t) e^{-tx} dt,$$

où le dernier terme est en valeur absolue inférieur à

$$\frac{\varepsilon e^{-cR(x)}}{R(x)}.$$

On en déduit que la fonction déterminante est représentée par

$$f(x) = e^{-cx} \sum_1^{\infty} \frac{c_n e^{-c a_n}}{x + a_n}, \quad (19)$$

et à cause de la convergence absolue de la série des numérateurs, c'est une fonction méromorphe avec les pôles $-a_n$ sur l'axe négatif et les résidus respectifs c_n .¹

5. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue entre c et ∞ dont toutes les dérivées successives soient aussi continues entre c et ∞ . La fonction $\varphi(t)$ et ses dérivées soient d'ordre fini. Soit $\varphi(t)$ d'ordre négatif $-\lambda_0$; la fonction

$$\varphi_0(t) = e^{\lambda_0 t} \varphi(t)$$

aura l'ordre zéro. Soit la dérivée $\varphi'_0(t)$ d'ordre négatif $-\lambda_1$. L'intégrale

¹ Le saut $\delta(-t)$ est ici zéro, mais si on envisage l'intégrale de $f(x)$, donnée par une série de logarithmes, le saut est la fonction scalaire, constante dans les intervalles $-a_n \dots -a_{n+1}$, qu'on doit envisager comme la génératrice de $\frac{\varphi(t)}{t}$

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t) e^{-tx} dt = \int_c^\infty \varphi_0(t) e^{-t(x+\lambda_0)} dt$$

sera convergente pour $R(x) > -\lambda_0$. En intégrant par parties, on aura

$$f(x) = \frac{\varphi_0(c) e^{-c(x+\lambda_0)}}{x + \lambda_0} + \frac{1}{x + \lambda_0} f_1(x), \quad (20)$$

où

$$f_1(x) = \int_c^\infty \varphi'_0(t) e^{-t(x+\lambda_0)} dt. \quad (21)$$

D'après l'hypothèse faite, $f_1(x)$ est convergente pour

$$R(x) > -(\lambda_0 + \lambda_1);$$

de l'égalité (20) on déduit donc que $-\lambda_0$ est un pôle pour $f(x)$. Puisque les dérivées de la fonction sous le signe \int en (21) existent, on sait [D, n° 15] que si x tend à l'infini dans un angle V dont les côtés ont les directions $-\frac{\pi}{2} + \eta$ et $\frac{\pi}{2} - \eta$, $\left(0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right)$ la fonction $e^{cx} f_1(x)$ tend uniformément à zéro du premier ordre. En prenant ε positif quelconque, on a donc, pour x assez grand,

$$(x + \lambda_0) \left\{ f(x) e^{cx} - \frac{\varphi_0(c) e^{-c\lambda_0}}{x + \lambda_0} \right\} < \varepsilon. \quad (22)$$

Soit $\varphi'_0(t)$ dans les mêmes conditions que $\varphi(t)$; c'est à dire que

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi'_0(t),$$

d'ordre zéro, ait sa dérivée d'ordre négatif $-\lambda_2$. On aura

$$f_1(x) = \frac{\varphi_1(c) e^{-c(x+\lambda_0+\lambda_1)}}{x + \lambda_0 + \lambda_1} + \frac{1}{x + \lambda_0 + \lambda_1} f_2(x),$$

où

$$f_2(x) = \int_c^\infty \varphi'_1(t) e^{-t(x+\lambda_0+\lambda_1)} dt,$$

et en posant

$$\alpha_0 = \lambda_0, \quad \alpha_1 = \lambda_0 + \lambda_1,$$

$$q_0(c) e^{-cx} = k_0, \quad q_1(c) e^{-c(x+\alpha_1)} = k_1$$

on aura

$$f_1(x) = \frac{k_1 e^{-cx}}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_1} f_2(x).$$

d'où

$$f(x) = e^{-cx} \left(\frac{k_0}{x + \alpha_0} + \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} \right) + \frac{1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} f_2(x).$$

Et puisque, pour x tendant à l'infini dans l'angle V , $e^{cx} f_2(x)$ tend uniformément à zéro, on aura pour $|x|$ suffisamment grand:

$$(x + \alpha_0)(x + \alpha_1) \left\{ f(x) e^{cx} - \frac{k_0}{x + \alpha_0} - \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} \right\} < \varepsilon. \quad (24)$$

Et ainsi de suite; en poursuivant de la même manière, avec des hypothèses et des notations analogues, on arrivera pour $f(x) e^{cx}$ au développement asymptotique:

$$f(x) e^{cx} = \frac{k_0}{x + \alpha_0} + \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} + \dots \quad (25)$$

précisément dans le sens exprimé par les inégalités (22) et (24), c'est à dire dans le sens défini par POINCARÉ pour les développements asymptotiques en séries de puissances négatives de x .

L'application de ce qui précède au cas où $\varphi(t)$ est donnée par une série (18) est évidente. La déterminante d'une série de DIRICHLET admet donc un développement asymptotique de la forme (25).

On doit remarquer que dans le cas de la convergence effective du développement qu'on vient de trouver, la méthode que nous avons esquissée sert à donner la transformation d'une fonction méromorphe avec des pôles simples en une série de factorielles généralisées.

RECHERCHES SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMETRIQUES DES FONCTIONS ARBITRAIRES D'UNE VARIABLE ET PRINCIPALEMENT DE CELLES QUI, DANS UN INTERVALLE FINI, ADMETTENT UNE INFINITÉ DE MAXIMA ET DE MINIMA.

PAR

R. LIPSCHITZ.¹

Traduit du latin par M. PAUL MONTEL, à Paris.

Les séries qui procèdent suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un angle, à l'aide desquelles on développe une fonction arbitraire d'une variable sont depuis longtemps très employées dans les diverses branches des mathématiques par tous ceux qui s'occupent de ces questions. C'est pourquoi il appartenait aux géomètres d'étudier à fond le champ étendu de ces fonctions et de tracer la limite entre celles qui peuvent être développées en séries trigonométriques et celles qui ne possèdent pas cette propriété. L'éminent LEJEUNE-DIRICHLET s'est acquitté de cette charge, sans parler des efforts tentés auparavant par d'autres, dans son célèbre mémoire intitulé: »Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données». ² Qu'il me soit permis d'esquisser les progrès considérables que ce mémoire a fait faire à l'analyse afin de rendre plus claires la nature et la portée des questions abordées et résolues dans ce travail.

Le mémoire du célèbre géomètre repose sur le principe suivant: étant donnée une fonction arbitraire $\varphi(x)$, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ de la variable x , formons la série

¹ Journal de Crelle V. 63 (1864). p. 296.

² Journal de Crelle V. 4 p. 157.

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha + \dots \\ & \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \sin 2x \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha + \dots \end{aligned} \right.$$

la somme des $2n+1$ premiers termes de cette série s'exprime par l'intégrale définie

$$(2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) (\alpha - x)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - x)} d\alpha;$$

si cette intégrale admet une limite lorsque n croît indéfiniment, cette valeur limite n'est autre que la somme de la série (1). Tout le raisonnement va reposer sur la condition que $\varphi(x)$ soit finie dans tout l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et ne présente qu'un nombre fini de discontinuités et un nombre fini de maxima ou minima. On démontre d'ailleurs, la proposition suivante:

Théorème I. Les quantités g et h vérifiant les inégalités $0 \leq g < h \leq \frac{\pi}{2}$, soit $f(\beta)$ une fonction définie depuis la valeur $\beta = g$ jusqu'à la valeur $\beta = h$, finie, continue, constante ou croissante dans tout l'intervalle considéré ou bien constante ou décroissante, alors, l'intégrale

$$\int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

a une limite lorsque k croît indéfiniment. Cette limite est nulle lorsque la quantité g est positive et égale à $\frac{\pi}{2} f(0)$ lorsque la quantité g est nulle.

On déduit de ce théorème, sous les conditions énoncées ci dessus, que l'intégrale (2) converge, lorsque n croît indéfiniment, vers la valeur

$$\frac{1}{2} [\varphi(x - \varepsilon) + \varphi(x + \varepsilon)],$$

en désignant par ε une quantité infiniment petite; il en résulte que la série (1) est convergente pour toute valeur de x . On lit d'autre part à la fin du mémoire cité, les mots suivants: »Il nous resterait à considérer les cas où les

suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer.» Et, quelques mots plus loin: «mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer, exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7)», qui est notre série (1). Comme il est tout à fait regrettable pour les géomètres que ce travail n'ait jamais vu le jour, nous nous sommes proposés de retrouver les traces de ces recherches et d'en tirer parti dans la mesure de nos forces. Rappelons d'abord ce qu'on a pu réunir des écrits de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET: nous possédons en effet, en outre du travail cité plus haut, une autre exposition de la même démonstration dans le répertoire de physique publié par les distingués DOVE et MOSER et le célèbre mémoire intitulé: «Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données».¹

Les fonctions $\varphi(x)$ qui ne satisfont pas aux conditions précédemment énoncées peuvent être distribuées en trois types suivant que, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, elles prennent des valeurs infinies ou possèdent un nombre infini de discontinuités ou un nombre infini de maxima et de minima. Il suffit d'examiner chacun de ces trois cas, pour ainsi dire, en lui-même, la réunion de deux ou de trois de ces cas modifiant plutôt la forme que la nature et les propriétés de la série (1).

On trouvera les restrictions auxquelles la fonction $\varphi(x)$ doit être assujettie dans les deux premiers cas, en cherchant des conditions telles que les intégrales définies qui jouent le rôle de coefficients dans la série (1), aient certainement un sens. Dans le premier cas, si on appelle (a, b) un intervalle compris entre $-\pi$

et $+\pi$, il est nécessaire que l'intégrale $\int_a^b \varphi(x) dx$ demeure une fonction finie et

continue des variables a et b .² Soient c_1, c_2, \dots, c_μ , toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction de x est infinie et $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu$, des quantités aussi petites que l'on veut; on peut détacher de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ μ intervalles partiels $(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1), (c_2 - \delta_2, c_2 + \delta_2), \dots, (c_\mu - \delta_\mu, c_\mu + \delta_\mu)$ que nous appellerons intervalles de première espèce. Quant à l'espace restant, il est composé d'un nombre fini

¹ Journal de Crelle. Vol. XVII p. 35.

² Journal de Crelle. Vol. XVII p. 54.

d'intervalles d'une seconde espèce, dans chacun desquels la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions imposées à la fonction $f(\beta)$ dans le théorème I. Pour le second cas, dans lequel la fonction $\varphi(x)$ possède dans l'intervalle fini $(-\pi, +\pi)$ une infinité de discontinuités, il est nécessaire que, si l'on désigne par a et b deux nombres placés entre $-\pi$ et $+\pi$, on puisse toujours trouver entre a et b des nombres r et s tels que la fonction $\varphi(x)$ demeure finie et continue dans l'intervalle (r, s) .¹ On déduit de là, par un raisonnement convenable, que l'on peut partager l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en un nombre fini d'intervalles partiels dont les deux espèces sont analogues aux deux espèces du premier cas.² Chaque intervalle de première espèce a une longueur arbitrairement petite et contient une infinité de discontinuités; nous désignerons ces intervalles par les mêmes notations que précédemment: $(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1)$, $(c_2 - \delta_2, c_2 + \delta_2)$, \dots $(c_\mu - \delta_\mu, c_\mu + \delta_\mu)$. Chaque intervalle de seconde espèce possède la propriété que la fonction $\varphi(x)$ satisfasse, dans tout cet intervalle, aux conditions auxquelles est astreinte la fonction $f(\beta)$ dans le théorème I. S'il s'agit maintenant de décider de la convergence de la série (1), le point capital réside dans la question de savoir si l'intégrale (2) s'approche ou non d'une valeur limite lorsque n croît indéfiniment. Pour cela, attribuons à x une valeur arbitraire de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ mais différente des nombres c_1, c_2, \dots, c_μ ; on peut toujours, dans l'un comme dans l'autre cas, choisir les quantités $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu$ assez petites pour que la valeur x tombe dans un intervalle de seconde espèce. Comme l'intégrale (2) est étendue de $-\pi$ à $+\pi$, si on divise cet intervalle comme ci-dessus, cette intégrale sera égale à une somme d'intégrales de même forme dont les limites seront celles des intervalles de première ou de seconde espèce. Nous appellerons intégrales de première espèce, celles qui sont étendues aux intervalles de première espèce et intégrales de seconde espèce celles qui sont étendues aux intervalles de seconde espèce. Que les intégrales de première espèce puissent être rendues aussi petites qu'on le veut, par un choix convenable des quantités $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu$, quelle que soit la valeur de n , cela a été démontré au moins dans le premier cas par l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET³ mais, dans le second cas, repose sur ce fait que chacune des intégrales est la somme d'une infinité d'intégrales constituées de manière que cette somme même puisse être rendue aussi petite qu'on le veut. Pour les intégrales de seconde espèce, elles sont constituées de telle sorte que, à l'aide du théorème I, il apparaît immédiatement que chacune d'elles a une limite

¹ Journal de Crelle Vol. IV p. 169.

² L'auteur suppose que l'ensemble des points de discontinuité est non dense et croît pouvoir en conclure que le dérivé de cet ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points. Cette hypothèse doit être introduite dans ce qui suit. (Note du Traducteur.)

³ Journal de Crelle Vol. XVII p. 55.

lorsque n croît indéfiniment. On conclut de là que, lorsque n croît indéfiniment, l'intégrale (2) a pour limite

$$\frac{1}{2} [\varphi(x - \varepsilon) + \varphi(x + \varepsilon)]$$

(où ε est un infiniment petit), et cette valeur est la somme de la série (1). Il est donc manifeste que, sous les conditions énoncées, notre série est convergente pour chaque valeur de x entre $-\pi$ et $+\pi$, les valeurs c_1, c_2, \dots, c_n exceptées. D'ailleurs on ne peut affirmer qu'il n'existe aucun cas où la série (1) aurait un sens, même pour ces valeurs particulières. Mais nous laisserons ici de côté la recherche de ces cas.

Il nous reste à nous occuper du troisième cas, dans lequel la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ sauf pour un nombre fini de valeurs de discontinuités, mais possède une infinité de maxima et de minima. Assurément, dans les écrits de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET, ne se trouve aucune indication permettant de frayer une route pour résoudre ces questions, si ce n'est les mots suivants se rapportant aux trois cas, qu'on peut lire dans le premier des mémoires cités¹: »La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède.» Remarquons que la restriction dont il s'agit ici est celle qui concerne notre second cas et le premier cas (où la fonction $\varphi(x)$ a des valeurs infinies) n'a pas été traité avant le mémoire intitulé: »Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles etc.» Aussi étudierons nous le troisième cas avec le plus grand soin.

Il y a assurément une grande différence entre les deux premiers cas et le troisième, car, dans ces premiers cas, la fonction $\varphi(x)$ est astreinte à des conditions telles que les intégrales définies, coefficients de la série (1) aient un sens alors que dans le dernier cas il résulte de l'hypothèse même que ces conditions sont remplies. En effet, désignons par a_1, a_1, \dots, a_v , les valeurs de discontinuité de la fonction $\varphi(x)$; chacune des intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \sin n\alpha d\alpha$$

est égale à une somme d'intégrales de même forme, prises entre les limites $-\pi$ et a_1, a_1 et a_2, \dots, a_v et π et il n'est pas douteux que chacune des intégrales de chacune de ces sommes et par suite les sommes elles-mêmes aient un sens. Car, la

¹ Journal de Crelle. Vol. IV p. 169.

notion d'intégrale définie repose sur le maintien de la continuité de la fonction dans l'intervalle d'intégration et demeure la même si on trouve une infinité de maxima et de minima dans l'intervalle d'intégration. Mais on peut obtenir, de deux manières entièrement différentes, un nombre infini de maxima et de minima dans un intervalle fini de la variable.

Considérons en effet un intervalle (a, b) ; ou bien on peut intercaler entre a et b les nombres $r - \delta$ et $r + \delta$ tels qu'il y ait un nombre fini de maxima et minima dans $(a, r - \delta)$ et $(r + \delta, b)$, mais un nombre infini entre $r - \delta$ et $r + \delta$, quelque petite que soit la distance 2δ de ces deux nombres; ou bien, quelles que soient les quantités r et s , situées dans l'intervalle (a, b) et à une distance finie l'une de l'autre, on ne peut jamais trouver un nombre fini de maxima et de minima dans l'intervalle (r, s) ; ou bien, l'intervalle considéré contient un nombre fini d'intervalles non nuls dans lesquels l'une ou l'autre hypothèse est réalisée. Pour abréger, nous énoncerons ces faits en disant que, dans le premier cas, la fonction a une oscillation pour $x = r$; dans le second, que la fonction a une oscillation dans tout l'intervalle (a, b) ; enfin, dans le troisième, que la fonction a des oscillations à la fois pour certaines valeurs et dans certains intervalles finis de la variable x . Nous voyons que les deux genres d'oscillations sont entièrement différents.¹

L'examen de tous les faits servant à établir la convergence de la série (1) montre qu'il est nécessaire de s'appuyer sur une proposition qui jouera dans nos recherches le rôle du théorème I, mais aura une généralité plus grande. C'est pourquoi nous nous proposons d'établir le

Théorème II. Désignons par g et h des quantités vérifiant les inégalités

$$0 \leq g < h \leq \frac{\pi}{2},$$

et soit $f(\beta)$, une fonction qui, dans l'intervalle (g, h) reste comprise entre les valeurs positive et négative d'une constante; telle que la différence $f(g + \delta) - f(g)$ tende vers zéro avec δ ; telle que la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$, pour $g < \beta < h$, ait une valeur absolue inférieure au produit d'une constante par une puissance positive quelconque de δ ; alors l'intégrale $\int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$ a une limite lorsque

¹ L'auteur suppose que trois cas seulement peuvent se présenter: ou bien l'ensemble dérivé de l'ensemble des valeurs correspondant aux maxima et minima ne comprend qu'un nombre fini de points; ou bien cet ensemble est partout dense; ou bien l'intervalle donné est la réunion d'un nombre fini d'intervalles partiels de chacune de ces espèces. La démonstration qui suit s'applique d'ailleurs à tous les cas possibles. (Note du Traducteur).

k augmente indéfiniment. Cette limite est nulle si g est positive et a pour valeur $\frac{\pi}{2} f(0)$ si g est nulle. On peut établir cette proposition comme il suit.

Démonstration. On voit très facilement, à l'aide des mémoires cités plus haut de l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET, qu'il suffit de démontrer notre proposition dans l'hypothèse où $g=0$ et où la fonction $f(\beta)$ est toujours positive dans l'intervalle $(0, h)$. En conséquence, nous l'établirons seulement pour le cas où, dans l'intervalle $(0, h)$, la fonction $f(\beta)$ satisfait aux inégalités $0 < f(\beta) < A$; où la différence $f(\delta) - f(0)$ a pour limite 0 avec δ ; où la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$, pour $0 < \beta < h$ demeure en valeur absolue, lorsque δ décroît, inférieure à l'expression $B\delta^a$, les signes A, B, a désignant des quantités positives; l'intégrale

$$(3) \quad S = \int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

possède alors la propriété de converger vers $\frac{\pi}{2} f(0)$ lorsque la quantité positive k croît indéfiniment. Nous nous servirons des notations utilisées par l'éminent LEJEUNE-DIRICHLET dans le mémoire qui se trouve dans le répertoire publié par les distingués MOSER et DOVE et nous en extraierons quelques formules. En cet endroit, en supposant k égal au nombre impair $2n + 1$ (et l'introduction de cette restriction est sans importance pour le théorème II et suffit dans la suite), on trouve, de la manière la plus simple la valeur de l'intégrale

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

Si on désigne alors par $\frac{r\pi}{k}$, le plus grand multiple de $\frac{\pi}{k}$ contenu dans h , l'intégrale S se partage en $r + 1$ intégrales aux limites 0 et $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{k}$ et $\frac{2\pi}{k}$, ..., $\frac{r\pi}{k}$ et h et l'intégrale (4) en un certain nombre d'intégrales comprises entre des limites analogues; il vient ainsi

$$(5) \quad S = R_1 - R_2 + \dots + (-1)^r R_{r+1}$$

$$(6) \quad R_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

$$(7) \quad \frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 \dots,$$

$$(8) \quad \varrho_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta.$$

Ensuite, la quantité positive ϱ_ν vérifie les inégalités

$$(9) \quad \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} < \varrho_\nu < \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}},$$

et, si $2m$ désigne un nombre pair quelconque inférieur à r , on a

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \dots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} \\ \frac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \dots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}, \end{cases}$$

et, il en résulte pour la quantité ϱ_1

$$(10^a) \quad \varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}}.$$

Nous avons encore besoin pour notre recherche de porter notre attention sur la somme composée de parties positives

$$\varrho_{\nu+1} + \varrho_{\nu+2} + \dots + \varrho_{\nu'},$$

dans laquelle $\nu \geq 1$, $\nu' \leq r$, et de trouver une limite supérieure de la valeur de cette somme. Comme, dans l'expression (8) de la quantité ϱ_ν , le facteur $\sin k\beta$ ne change pas de signe dans l'intervalle d'intégration et ne dépasse jamais l'unité, on a

$$\varrho_\nu < \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{d\beta}{\sin \beta},$$

d'où l'on déduit la limite cherchée

$$(11) \quad \varrho_{\nu+1} + \varrho_{\nu+2} + \dots + \varrho_{\nu'} < \int_{\frac{\nu+1}{k}}^{\frac{\nu'}{k}} \frac{d\beta}{\sin \beta} = \log \operatorname{tg} \frac{\nu'}{2k} - \log \operatorname{tg} \frac{\nu+1}{2k}.$$

Posons alors

$$(12) \quad \begin{cases} S' = R_1 - R_2 + \dots + R_{2m-1} - R_{2m} \\ S'' = R_{2m+1} - R_{2m+2} + \dots + (-1)^r R_{r+1} \end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$(13) \quad S = S' + S''$$

et voyons comment se comportent les sommes S' et S'' lorsque le nombre k croît indéfiniment. Dans ce but, nous ramènerons à une forme un peu différente l'expression $R_{2t+1} - R_{2t+2}$ qui, si $t < m$ est une partie de la somme S' et si $t \geq m$ est une partie de la somme S'' . Par l'introduction dans l'expression de R_ν de la nouvelle variable $\gamma = k\beta$, il vient

$$(14) \quad R_\nu = (-1)^{\nu-1} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} f\left(\frac{\gamma}{k}\right) \frac{\sin \gamma d\gamma}{\sin \frac{\gamma}{k}} = \int_0^\pi f\left[\frac{(\nu-1)\pi + \gamma}{k}\right] \frac{\sin \gamma}{\sin \left[\frac{(\nu-1)\pi + \gamma}{k}\right]} \frac{d\gamma}{k},$$

d'où

$$(15) \quad R_{2t+1} - R_{2t+2} = \int_0^\pi \left[\frac{f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right)}{\sin \frac{2t\pi + \gamma}{k}} - \frac{f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]}{\sin \frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}} \right] \frac{\sin \gamma d\gamma}{k}$$

ou mieux

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & R_{2t+1} - R_{2t+2} = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) + f\left(\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right) \right] \left[\frac{1}{\sin \frac{2t\pi + \gamma}{k}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sin \frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}} \right] \frac{\sin \gamma d\gamma}{k} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2t\pi + \gamma}{k}} \left[f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - f\left(\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right) \right] \left[\sin \frac{2t\pi + \gamma}{k} + \frac{1}{\sin \frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}} \right] \frac{\sin \gamma d\gamma}{k} \right|$$

Comme les facteurs qui entrent dans ces deux intégrales

$$\frac{1}{\sin \frac{2t\pi + \gamma}{k}} - \frac{1}{\sin \frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}}, \sin \gamma \text{ et } \frac{1}{\sin \frac{2t\pi + \gamma}{k}} + \frac{1}{\sin \frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}}$$

demeurent positifs dans le champ d'intégration, on pourra estimer la valeur de la première intégrale, en remplaçant le facteur $f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) + f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ par une quantité plus grande ou plus petite et la valeur de la seconde intégrale en remplaçant le facteur $f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ par une quantité plus grande ou plus petite. Il y a lieu d'opérer différemment suivant que $t < m$ ou $t \geq m$.

Dans le premier cas, ne se trouvent sous les signes d'intégration de la formule (16) que les valeurs de la fonction $f(\beta)$ qui correspondent à l'intervalle $\left(0, \frac{2m\pi}{k}\right)$. Si nous désignons par $f(0) + \lambda$ le maximum absolu et par $f(0) - \mu$ le minimum absolu de ces valeurs qui, par hypothèse, sont positives et inférieures à A il est clair que la somme $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) + \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ est comprise entre $f(0) - \mu$ et $f(0) + \lambda$, que la différence $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ est comprise entre $\pm \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)$ et on obtient les relations

$$(17) \begin{cases} R_{2t+1} - R_{2t+2} < [f(0) + \lambda](\varrho_{2t+1} - \varrho_{2t+2}) + \frac{\lambda + \mu}{2}(\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}) \\ R_{2t+1} - R_{2t+2} > [f(0) - \mu](\varrho_{2t+1} - \varrho_{2t+2}) - \frac{\lambda + \mu}{2}(\varrho_{2t+1} + \varrho_{2t+2}). \end{cases}$$

Dans le second cas, où $t \geq m$, sous les signes d'intégration de la formule (16) ne se trouvent que des valeurs de $f(\beta)$ correspondant aux valeurs de β comprises entre $\frac{2m\pi}{k}$ et h . Rappelons alors que la somme $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) + \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$

est positive et inférieure à A . Pour estimer la différence $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$, dans laquelle γ prend toutes les valeurs entre 0 et π , il est permis de supposer le nombre k assez grand pour pouvoir utiliser l'hypothèse faite sur la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$. En effet, puisque la valeur absolue de la différence $f(\beta + \delta) - f(\beta)$, si $0 < \beta < h$, devient, lorsque δ est une quantité positive décroissante, inférieure à $B\delta^a$ et que, dans notre cas, on a $\frac{2t\pi + \gamma}{k} \leq \frac{2m\pi}{k}$, $\delta = \frac{\pi}{k}$, on voit que la différence $\frac{1}{2} f\left(\frac{2t\pi + \gamma}{k}\right) - \frac{1}{2} f\left[\frac{(2t+1)\pi + \gamma}{k}\right]$ est comprise entre les limites $\pm \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a$. On obtient alors les relations

$$(18) \quad \begin{cases} R_{2t+1} - R_{2t+2} < A(q_{2t+1} - q_{2t+2}) + \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (q_{2t+1} + q_{2t+2}) \\ t \leq m; \\ R_{2t+1} - R_{2t+2} > -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (q_{2t+1} + q_{2t+2}). \end{cases}$$

Nos formules (17) et (18) sont applicables à toutes les parties des sommes S' et S'' , excepté R_{r+1} si r est égal à un nombre pair $2q$ ou l'expression $R_r - R_{r+1}$ si r est égal à un nombre impair $2q + 1$. Comme il résulte des hypothèses que $R_r > 0$, $R_{r+1} > 0$, $R_r < Aq_r$, $R_{r+1} < Aq_{r+1}$, $q_{r+1} < q_r$, il n'est pas douteux que la quantité R_{r+1} , si $r = 2q$, la quantité $R_r - R_{r+1}$, si $r = 2q + 1$ soient comprises entre les mêmes limites $\pm Aq_{2q}$. On peut donc évaluer de la manière suivante les sommes S' et S''

$$(19) \quad \begin{cases} S' < [f(0) + \lambda](q_1 - q_2 + \dots + q_{2m-1} - q_{2m}) + \frac{\lambda + \mu}{2}(q_1 + q_2 + \dots + q_{2m-1} + q_{2m}), \\ S' > [f(0) - \mu](q_1 - q_2 + \dots + q_{2m-1} - q_{2m}) - \frac{\lambda + \mu}{2}(q_1 + q_2 + \dots + q_{2m-1} + q_{2m}), \\ S'' < A(q_{2m+1} - q_{2m+2} + \dots + q_{2q-1} - q_{2q}) + \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (q_{2m+1} + \dots + q_{2q}) + Aq_{2q}, \\ S'' > -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k}\right)^a (q_{2m+1} + \dots + q_{2q}) - Aq_{2q}. \end{cases}$$

Maintenant, des formules (9), (10), (10^a), (11) découlent les suivantes

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{2m\pi}{k}} < \varrho_1 - \varrho_2 + \dots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m} < \frac{\pi}{2}, \\ \varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2} + \dots + \varrho_{2q-1} - \varrho_{2q} < \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{2m\pi}{k}}, \quad \varrho_{2q} < \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{k}}, \\ \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m} < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} + \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k}, \\ \varrho_{2m+1} + \dots + \varrho_{2q} < \log \operatorname{tg} \frac{q\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k}, \end{array} \right.$$

qui, substituées dans les formules (19) donnent les nouvelles formules

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} S' < [f(0) + \lambda] \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda + \mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} + \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k} \right), \\ S' > [f(0) - \mu] \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{2m\pi}{k}} \right) - \frac{\lambda + \mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} + \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k} \right), \\ S'' < \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{q\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} \right) + A \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{k}} + A \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{2m\pi}{k}}, \\ S'' > -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{q\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} \right) - A \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{k}}. \end{array} \right.$$

Pour conclure de ces relations l'exactitude de notre proposition, nous donnerons à m une valeur fixe, tandis que le nombre k croîtra continuellement. Par hypothèse, la différence $f(\delta) - f(0)$ peut être rendue, lorsque δ décroît, aussi petite que l'on veut, $f(0) + \lambda$ est le maximum absolu, $f(0) - \mu$ le minimum absolu de la fonction $f(\beta)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{2m\pi}{k}\right)$ et la quantité $\frac{2m\pi}{k}$ décroît continuellement, donc les quantités λ et μ ne peuvent pas ne pas décroître elles-mêmes indéfiniment. D'autre part, en utilisant des principes d'analyse connus, on peut écrire

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{k}} + \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k} &= \frac{2}{\pi} + \log 2m + w, \\ \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2m\pi}} - \frac{1}{m\pi} &= w', \\ \log \operatorname{tg} \frac{q\pi}{k} - \log \operatorname{tg} \frac{m\pi}{k} &= \log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log \frac{m\pi}{k} + w'', \\ \frac{2}{k} \frac{1}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{k}} &= \frac{2}{k} \frac{1}{\sin h} + w''', \end{aligned} \right.$$

où les signes w, w', w'', w''' désignent des quantités qui tendent vers zéro lorsque k croît indéfiniment. En tenant compte de ces dernières formules, les relations (21) peuvent être ramenées à la forme suivante

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} S' &< [f(0) + \lambda] \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda + \mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} + \log 2m + w \right), \\ S' &> [f(0) - \mu] \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{m\pi} - w' \right) - \frac{\lambda + \mu}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} + \log 2m + w \right), \\ S'' &< \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log \frac{m\pi}{k} + w'' \right) + A \left(\frac{2}{k} \frac{1}{\sin h} + w''' + \frac{1}{m\pi} + w' \right), \\ S'' &> -\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log \frac{m\pi}{k} + w'' \right) - A \left(\frac{2}{k} \frac{1}{\sin h} + w''' \right). \end{aligned} \right.$$

Remarquons que, dans ces formules, l'expression

$$\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log \frac{m\pi}{k} \right),$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \left(\log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log m \right) + \frac{1}{2} B \left(\frac{\pi}{k} \right)^a \log \frac{k}{\pi}$$

peut être rendue aussi petite qu'on le veut, lorsque k croît indéfiniment, parce que la somme $\log \operatorname{tg} \frac{h}{2} - \log m$ garde une valeur constante, tandis que la puissance $\left(\frac{\pi}{k} \right)^a$ décroît et, enfin, parce que la fonction $\left(\frac{\pi}{k} \right)^a \log \frac{k}{\pi}$, bien que le facteur

$\log \frac{k}{\pi}$ croisse indéfiniment, décroît elle-même pour toute valeur positive de α .

Et c'est ici que se trouve le point essentiel de notre démonstration. Si en effet, nous désignons par $\nu_i, \nu_i', \nu_i'', \nu_i'''$ des quantités tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, nous obtenons les formules

$$(24) \quad \begin{cases} S' < \frac{\pi}{2} f(0) + \nu_i & S' > \frac{\pi}{2} f(0) - \frac{A}{m\pi} + \nu_i' \\ S'' < \frac{A}{m\pi} + \nu_i'' & S'' > -\nu_i''' \end{cases}$$

D'où l'on voit que, pourvu que m prenne une valeur telle que la quantité $\frac{A}{m\pi}$ soit inférieure à un nombre arbitrairement petit, ce qui est manifestement toujours possible, la somme S' est comprise entre des limites qui diffèrent de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'aussi peu que l'on veut, et la somme S'' est comprise entre des limites aussi voisines de zéro que l'on veut. Donc, puisque lorsque k croît indéfiniment, la somme S' a pour limite $\frac{\pi}{2} f(0)$ et la somme S'' a pour limite 0, il est évident que la somme $S = S' + S''$ a pour limite $\frac{\pi}{2} f(0)$. C'est ce que nous voulions démontrer.

En possession d'une démonstration rigoureuse du théorème II, nous sommes en mesure de mieux connaître la manière dont la série (1) se comporte dans notre troisième cas. Elle est, en effet, convergente et a toujours pour somme $\frac{1}{2}[\varphi(x - \varepsilon) + \varphi(x + \varepsilon)]$, en désignant par ε une quantité infiniment petite, quelle que soit la valeur attribuée à x dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et cela, lorsque la fonction $\varphi(x)$ présente des oscillations pour certaines valeurs particulières de la variable et même dans tous les cas, sauf une exception, où la fonction $\varphi(x)$ présente des oscillations dans certains segments finis de l'intervalle total. Cette exception se présente lorsque dans un segment fini, bien que la différence $\varphi(x + \delta) - \varphi(x)$ tende vers zéro avec δ , puisque la continuité est conservée dans ce segment (c'est d'ailleurs la définition même de la continuité),¹ cette différence diminue cependant de telle sorte qu'on ne puisse trouver aucune puissance positive de δ qui lui reste supérieure pour toutes les valeurs de la variable contenues dans ce segment. C'est ce qui arrivera évidemment si $\varphi(x + \delta) - \varphi(x)$

¹ Journal de Crelle. Vol. IV, p. 159.

décroît de la même manière ou plus lentement que la fonction $-\frac{1}{\log \frac{1}{\delta}}$.¹ D'ail-

leurs la démonstration demeure valable si, dans les segments où la fonction $\varphi(x)$ a une oscillation, il arrive que, pour des valeurs particulières de la variable x , la différence $\varphi(x + \delta) - \varphi(x)$ se comporte comme il vient d'être dit.

Ce cas d'exception écarté, on pourra toujours partager l'intervalle $(-x, +x)$ de la fonction $\varphi(x)$ en un nombre fini d'intervalles partiels dont on obtiendra les extrémités en rangeant par ordre de grandeur 1° les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction $\varphi(x)$ est discontinue, 2° celles où la fonction a des maxima et minima isolés, 3° celles où la fonction possède des oscillations, 4° les limites de segments dans lesquels la fonction a des oscillations, 5° enfin, les valeurs isolées, lorsqu'elles se présentent dans des segments de cette espèce, pour lesquelles la différence $\varphi(x + \delta) - \varphi(x)$ décroît plus lentement que n'importe quelle puissance positive de δ . L'intervalle d'intégration de l'intégrale (2) étant alors divisé de la même façon, l'intégrale (2) devient égale à une somme d'intégrales de même forme dont chacune a une valeur limite lorsque k croît indéfiniment, limite que l'on obtient facilement par l'application soit du théorème I, soit du théorème II; les conclusions annoncées en résultent.

J'espère pouvoir étudier à un autre moment et dans un nouveau mémoire la manière dont se comporte la série (1), dans la dernière hypothèse.

Ecrit à Bonn, le 10 Avril 1864.

¹ Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die in verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Art. 16. GAUSS.

SUR LES FONCTIONS A UN NOMBRE FINI DE BRANCHES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

Les fonctions analytiques les plus simples sont les fonctions uniformes et les fonctions à un nombre fini de déterminations. Les fonctions les plus importantes de cette classe satisfont à des équations différentielles algébriques de forme simple. Il est donc naturel de se poser la question d'étudier toutes les fonctions de la classe considérée que l'on peut rencontrer par l'intégration d'équations différentielles algébriques, et en particulier le problème suivant:

Étudier les propriétés des intégrales d'une équation différentielle algébrique quand chaque intégrale est une fonction à n déterminations au plus.

BRIOT et BOUQUET ont étudié ce problème pour une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0,$$

F étant une fonction entière et rationnelle de $\frac{dy}{dx}$ et de y , mais ne contenant pas x ,¹ et ils ont montré que, sous la condition posée, y doit être ou bien une fonction algébrique de x , ou bien une fonction algébrique de e^{gx} , ou bien une fonction algébrique de $p(gx)$, g étant une constante.

C'est M. PAINLEVÉ qui a abordé le problème pour une équation différentielle du premier ordre sans faire aucune supposition sur la forme de l'équation.² Les méthodes qu'il a proposées pour la solution du problème consistent à l'étude de l'intégrale générale comme fonction des valeurs initiales, et il vient facilement

¹ BRIOT et BOUQUET, *Intégrations des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques* (Journal de l'École Polytechnique, t. XXI).

² PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, et *Note sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches*, publiée dans le livre de M. BOUTROUX, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. EMILE BOREL).

au but quand il suppose que chaque intégrale admet le même nombre de déterminations, sauf peut-être certaines intégrales exceptionnelles formant un ensemble dénombrable. Pour démontrer que les intégrales exceptionnelles forment effectivement un ensemble dénombrable il a tenté deux méthodes différentes, mais il n'a considéré que des cas particuliers, et il ne semble pas que ses méthodes puissent donner la solution du problème dans le cas général.

Dans le mémoire présent nous allons traiter le problème en question par une méthode qui est de tout autre nature de celle de M. PAINLEVÉ. Nous ferons appliquer les résultats intéressants de M. BOUTROUX concernant la croissance des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre¹, à étudier la nature d'une intégrale à un nombre fini de déterminations. Nous arrivons ainsi non seulement à résoudre le problème de M. PAINLEVÉ, mais aussi à fixer le caractère de toute intégrale particulière qui est une fonction à un nombre fini de déterminations. De plus, nous aurons un résultat général sur la nature de certains points singuliers.

Pour obtenir une théorie complète nous exposons dans le premier chapitre les résultats de M. BOUTROUX; dans le second chapitre nous les appliquons au problème considéré.

La méthode s'applique à une équation différentielle d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$, mais nous n'étudions pour le moment que l'équation suivante du premier degré en $\frac{dy}{dx}$

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

P, Q étant des polynômes en x, y .

I. Les résultats de M. Boutroux.

1. Pour être complets nous rappelons certains résultats classiques que l'on a obtenus pour l'équation (1) et dont nous aurons besoin dans la suite. Partons du théorème fondamental de CAUCHY:

Si x_0, y_0 sont des valeurs finies telles que $Q(x_0, y_0) \neq 0$, il existe une seule série de puissance de $x - x_0$ qui converge dans un certain cercle, qui satisfait à l'équation différentielle et qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$. Si $Q(x, y) \neq 0$ pour $|x - x_0| \leq r$, $|y - y_0| < r'$ et si $\left| \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right| < M$ pour ces valeurs de x, y , la série converge au moins pour $|x - x_0| < r(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}})$.

¹ BOUTROUX, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, p. 39-54.

Faisons le prolongement analytique de cette série le long d'un certain chemin jusqu'à ce que l'on rencontre un point singulier. Soit a ce point singulier et désignons par y la branche définie par les prolongements successives. On conclut facilement que l'un des cas suivants doit avoir lieu:

- 1) on a $\lim_{x=a} y = b$ avec $Q(a, b) = 0$,
- 2) on a $\lim_{x=a} y = \infty$,
- 3) y ne tend vers aucune valeur déterminée (finie ou infinie) quand x tend vers a .

En s'appuyant sur le théorème de CAUCHY, M. PAINLEVÉ a démontré le théorème fondamental que *le troisième cas ne peut avoir lieu que si a est un point satisfaisant à l'une des conditions suivantes*:¹

- 1) $Q(a, y)$ est identiquement nulle,
- 2) les équations $P(a, y) = 0$, $Q(a, y) = 0$ ont une solution commune,
- 3) posant $y = \frac{z}{x}$ on aura une équation nouvelle, soit $\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}$: on a $P_1(a, 0) = 0$, $Q_1(a, 0) = 0$,
- 4) si $a = \infty$ on pose $x = \frac{1}{u}$, et pour l'équation nouvelle, $u = 0$ doit satisfaire à l'une des conditions précédentes.

Supposons que a soit distinct des points ξ en nombre fini définis par ces conditions. Si l'on a $\lim_{x=a} y = b$ et $Q(a, b) = 0$ et si $y = b$ est racine d'ordre r de l'équation $Q(a, y) = 0$, on démontre facilement qu'il existe une série de la forme

$$(x-a)^{\frac{1}{r+1}} \mathfrak{P} \left((x-a)^{\frac{1}{r+1}} \right),$$

avec $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, telle que

$$y = b + (x-a)^{\frac{1}{r+1}} \mathfrak{P} \left((x-a)^{\frac{1}{r+1}} \right)$$

pour une certaine détermination de $(x-a)^{\frac{1}{r+1}}$.

Si l'on a $\lim_{x=a} y = \infty$, on pose $y = \frac{z}{x}$; si $Q_1(a, 0) \neq 0$ on aura une égalité de la forme

$$z = (x-a)^n \mathfrak{P}(x-a), \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0$$

d'où

$$y = (x-a)^{-n} \mathfrak{P}_1(x-a).$$

Si $Q_1(a, 0) = 0$ et si $z = 0$ est racine d'ordre r de l'équation $Q_1(a, z) = 0$, on aura une égalité de la forme

¹ PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 23

$$y = (x - a)^{-\frac{1}{r+1}} \mathfrak{P} \left((x - a)^{\frac{1}{r+1}} \right), \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

A l'exception des points ξ , une intégrale quelconque de l'équation (1) ne saurait admettre d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques.

Il est à remarquer que les séries rencontrées toute-à-l'heure sont parfaitement déterminées par le point a et par leurs valeurs initiales pour $x = a$: p. ex.

si $Q(a, b) = 0$ il existe une seule série $b + (x - a)^{\frac{1}{r+1}} \mathfrak{P} \left((x - a)^{\frac{1}{r+1}} \right)$ qui satisfait à l'équation différentielle.

2. Abordons maintenant l'exposition des résultats de M. BOUTROUX. Nous considérons d'abord l'équation suivante

$$(1') \quad \frac{dy}{dx} = a_0 y^p + a_1 y^{p-1} + \dots + a_p,$$

a_0, a_1, \dots, a_p étant des fonctions rationnelles de x .

Il s'agit d'étudier la croissance des intégrales dans le voisinage d'un point ξ . Pour simplifier l'écriture nous supposons que $\xi = \infty$.

En général, il existe des points singuliers dans le voisinage de $x = \infty$ pour lesquels l'intégrale devient infini. Pour obtenir une exposition plus claire nous considérons d'abord un cas particulier où de tels singularités n'existent pas. Plus précisément, nous considérons une branche d'intégrale que l'on définit en partant d'une certaine série de puissance qui satisfait à l'équation (1') et en faisant des prolongements analytiques de toutes les manières possibles le long de chemins à l'extérieur d'un certain cercle $|x| = r$; et nous supposons que cette branche n'a aucun point singulier à distance finie. La branche ne sera pas nécessairement uniforme, un nombre fini ou une infinité de branches uniformes peuvent s'échanger quand x tourne autour du point $x = \infty$. Désignant la branche par $f(x)$ nous démontrons le théorème suivant:

Théorème A'. Il existe un nombre r tel que toute détermination de $f(x)$ satisfait à l'inégalité

$$|f(x)| < |x|^r$$

pour tout point x à l'extérieur d'un cercle $|x| = R$ assez grand.

Posons

$$a_i = x^{i_i} \left(a_i^{(0)} + a_i^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right), \quad a_i^{(0)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

les séries étant convergentes si $|x|$ est assez grand. Le second membre de l'équation (1') s'écrit donc

$$y^p x^{i_0} \left\{ a_0^{(0)} + a_0^{(1)} \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{y} x^{i_1 - i_0} \left(a_1^{(0)} + a_1^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{y^p} x^{i_p - i_0} \left(a_p^{(0)} + a_p^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right) \right\} \\ y^p x^{i_0} (a_0^{(0)} + q(x, y)),$$

et si y satisfait aux conditions

$$|y|^i \geq |x|^{k_i - i_0 + \varepsilon} \quad (i = 1, \dots, p)$$

ε étant un nombre positif, et ε est un nombre positif plus petit que les nombres ε et 1, $q(x, y)$ satisfait à l'inégalité

$$|q(x, y)| < |x|^{-\varepsilon}$$

si $|x|$ est assez grand. Supposons que ceci a lieu pour $|x| > r$.

Les conditions pour y sont remplies si l'on a

$$|y| \geq |x|^{\sigma + \varepsilon}$$

σ désignant le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i} (k_i - k_0) \quad (i = 1, \dots, p).$$

Maintenant, trois cas sont à distinguer:

1) on a $|f(x)| < |x|^{\sigma + \varepsilon}$ si $|x|$ est assez grand,

2) on a $|f(x)| \geq |x|^{\sigma + \varepsilon}$ si $|x|$ est assez grand,

3) on a tantôt l'une, tantôt l'autre inégalité dans un entourage arbitrairement petit de $x = \infty$.

Nous démontrons que c'est le premier cas seul qui peut avoir lieu. Considérons d'abord le second cas, en supposant que l'inégalité $|f(x)| \geq |x|^{\sigma + \varepsilon}$ ait lieu pour $|x| > r'$. Nous allons tirer certaines conclusions qui aboutissent à une contradiction, si ε satisfait à une certaine inégalité que nous écrirons dans un moment.

Soit $y = \mathfrak{F}(x - x_0)$ un élément de $f(x)$, $|x_0|$ étant plus grand que r, r' . Intégrant l'équation

$$y^{-p} \frac{dy}{dx} = x^{i_0} (a_0^{(0)} + q(x, y))$$

on aura

$$-y^{-(p-1)} + y_0^{-(p-1)} = (p-1) a_0^{(0)} \int_{x_0}^x x^{i_0} dx + (p-1) \int_{x_0}^x x^{i_0} q(x, y) dx,$$

où $y_0 = \mathfrak{F}(0)$.

La première intégrale se calcule immédiatement. En la développant suivant les puissances de $x - x_0$ on voit qu'elle peut s'écrire

$$(x - x_0) x_0^{\lambda_0} \left(1 + \varphi \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right) \right)$$

et que

$$\left| \varphi \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right) \right| < k \varepsilon'$$

pour $\left| \frac{x - x_0}{x_0} \right| < \varepsilon' < 1$, k étant un nombre positif indépendant de x_0, x .

Nous prenons $|x_0|$ assez grand pour que $\varepsilon' |x_0|$ soit plus petit que $|x_0| - r$, $|x_0| - r'$. Si $|x - x_0| < \varepsilon' |x_0|$ on aura donc, pour la seconde intégrale, en supposant que l'intégration soit effectuée le long d'une ligne droite

$$\left| \int_{x_0}^x x^{\lambda_0} \varphi(x, y) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |x^{\lambda_0} \varphi(x, y)| |dx| < \int_{x_0}^x |x|^{\lambda_0 - \iota} |dx| < k_1 |x_0|^{\lambda_0 - \iota} |x - x_0|,$$

k_1 étant le plus grand des nombres $(1 \pm \varepsilon')^{\lambda_0 - \iota}$.

Si l'on écrit

$$-y^{-(p-1)} + y_0^{-(p-1)} = (p-1) a_0^{(0)} (x - x_0) x_0^{\lambda_0} (1 + \varphi_1(x, x_0))$$

il résulte que

$$|\varphi_1(x, x_0)| < k \varepsilon' + \frac{k_1}{|a_0^{(0)}|} |x_0|^{-\iota} < 2k \varepsilon',$$

si $|x_0|$ est choisi suffisamment grand. Comme on a, d'après la supposition, $|y_0| \geq |x_0|^{p+\iota}$ on aura donc

$$|y|^{-(p-1)} > (p-1) |a_0^{(0)}| |x - x_0| |x_0|^{\lambda_0} (1 - 2k \varepsilon') - |x_0|^{-(p-1)(\sigma+\iota)}.$$

Nous supposons le nombre ε' assez petit pour que $2k \varepsilon' < 1$, et en prenant x sur la circonférence

$$|x - x_0| = h |x_0|^{-\lambda_0 - (p-1)(\sigma+\iota)},$$

de manière que l'inégalité précédente s'écrit

$$|y|^{-(p-1)} > [h(p-1) |a_0^{(0)}| (1 - 2k \varepsilon') - 1] |x_0|^{-(p-1)(\sigma+\iota)},$$

nous supposons que h a une valeur fixe telle que

$$h(p-1)|a_0^{(0)}|(1+2k\varepsilon') \geq 2.$$

Comme on a supposé dans le précédent que x satisfait à l'inégalité $|x-x_0| < \varepsilon'|x_0|$, il faut que l'égalité $|x-x_0| = h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ ne soit pas en contradiction avec cette inégalité. A cet effet il suffit que ε satisfait à l'inégalité

$$-h_0 - (p-1)(\sigma + \varepsilon) < 1,$$

et que $|x_0|$ est plus grand qu'un certain nombre, qui dépend naturellement de la valeur de h .

Si x est un point quelconque sur la circonférence $|x-x_0| = h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$, il résulte que l'on a

$$|y|^{-(p-1)} > |x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

d'où

$$|y| < |x_0|^{\sigma+\varepsilon}.$$

D'après un théorème de CAUCHY-WEIERSTRASS on en conclut que

$$|y_0| < |x_0|^{\sigma+\varepsilon}.$$

Or, ceci est contraire à l'hypothèse, et il est donc démontré que le second des trois cas énumérés ne peut pas avoir lieu.

Par des raisonnements analogues on démontre qu'il en est de même du troisième cas. En effet, supposons que l'on ait $|y_0| \geq |x_0|^{\sigma+\varepsilon}$, y_0 étant l'une des valeurs de $f(x)$ pour $x = x_0$ et $|x_0|$ étant assez grand, et considérons l'élément y de $f(x)$ qui pour $x = x_0$ devient égal à y_0 . De l'inégalité $|y_0| \geq |x_0|^{\sigma+\varepsilon}$ nous pouvons conclure que l'inégalité $|y| > \frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ doit avoir lieu pour $|x-x_0| < h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$, si K désigne le plus grand des nombres $K_1(1 \pm \varepsilon')^{\sigma+\varepsilon}$, K_1 étant défini par l'égalité

$$K_1^{p-1} = h(p-1)|a_0^{(0)}|(1+2k\varepsilon') + 1.$$

On voit d'abord que la dite inégalité a lieu dans un certain entourage de $x = x_0$, supposons qu'elle ait lieu pour $|x-x_0| < \varrho < h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$. Par suite, on a $|y| \geq \frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ pour $|x-x_0| < \varrho$. On en conclut que, pour ces dernières valeurs de x , $\varphi(x, y) < |x|^{-\varepsilon}$, si $|x_0|$ est choisi assez grand. Par suite, on peut répéter les raisonnements qui nous ont conduits dans le cas 2) à l'inégalité $|\varphi_1(x, x_0)| < 2k\varepsilon'$. On aura donc

$$|y|^{-(p-1)} < (p-1)|a_0^{(0)}||x-x_0||x_0|^{\lambda_0}(1+2k\varepsilon') + |x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$$

$$[h(p-1)|a_0^{(0)}|(1+2k\varepsilon') + 1]|x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

d'où l'on conclut que

$$|y| > \frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}.$$

Cette inégalité a donc lieu non seulement pour $|x-x_0| < \varrho$, mais aussi pour $|x-x_0| = \varrho$, par suite, elle a lieu dans un cercle plus grand. De proche en proche on voit qu'elle doit avoir lieu pour $|x-x_0| < h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$.

Par les raisonnements du cas 2) on aboutit donc à l'inégalité $|y_0| < |x_0|^{\sigma+\varepsilon}$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Par là, le théorème A' est démontré, le nombre τ étant égal à $\sigma + \varepsilon$; ε est un nombre positif satisfaisant à la seule inégalité $-\lambda_0 - (p-1)(\sigma + \varepsilon) < 1$ écrite plus haut.

3. Nous considérons maintenant le cas général où il existe des points singuliers dans le voisinage de $x = \infty$. Soit x un point dans le voisinage de $x = \infty$ et soit

$$y = (x-x)^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x-x)^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

l'intégrale qui a le point singulier \bar{x} . Nous démontrons d'abord le théorème suivant:

Théorème B'. *Si h est un nombre donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, la série $\mathfrak{P}\left((x-x)^{\frac{1}{p-1}}\right)$ converge pour*

$$|x-x| < h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}.$$

Supposons que le rayon de convergence ϱ soit plus petit que $h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$.

En raisonnant comme au n° précédent on voit que l'inégalité $|y| > \frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ a lieu pour $|x-x| < \varrho$ et que l'on a, pour ces mêmes valeurs de x , $|\varphi_1(x, \bar{x})| < 2k\varepsilon'$, $\varphi_1(x, \bar{x})$ étant définie par l'égalité

$$-y^{-(p-1)} = (p-1)a_0^{(0)}(x-x)x^{\lambda_0}(1+\varphi_1(x, \bar{x})).$$

Si l'on prend $\varrho' < \varrho$, il existe donc un nombre G (qui dépend de \bar{x}, ϱ') tel que $|y| < G$ pour toute détermination de $(x-x)^{\frac{1}{p-1}}$ et pour $\varrho' < |x-\bar{x}| < \varrho$. Or, il existe nécessairement sur le cercle $|x-\bar{x}| = \varrho$ un point singulier \bar{x}_1 tel que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_1} y = \infty$, si l'on choisit une certaine détermination de $(x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}$. Cette contradiction démontre le théorème.

Nous prenons maintenant le nombre h de manière que $h(p-1)|a_0^{(0)}| > 2$, et nous démontrons le théorème suivant:

Théorème U'. Soit $\Psi(x-x_0)$ l'intégrale qui pour $x=x_0$ devient égale à y_0 . Si $|x_0|$ est assez grand et si la série $\Psi(x-x_0)$ converge pour $|x-x_0| < h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\epsilon)}$ on a nécessairement $|y_0| < |x_0|^{\sigma+\epsilon}$.

Nous prenons le nombre ϵ' de manière que $h(p-1)|a_0^{(0)}|(1-2k\epsilon') \geq 2$ et nous supposons que l'on ait $|y_0| \geq |x_0|^{\sigma+\epsilon}$. En raisonnant de la même manière qu'au n° précédent, on aboutit alors à l'inégalité $|y_0| < |x_0|^{\sigma+\epsilon}$. Cette contradiction démontre le théorème.

Nous avons énoncé les résultats de M. BOUTROUX sans introduire la notion d'une surface de RIEMANN appartenant à une intégrale donnée. C'est ce que nous avons fait parce qu'il y a, en général, une certaine difficulté à concevoir une telle surface. Mais si on introduit la surface,¹ on peut énoncer, avec M. BOUTROUX les résultats précédents d'une manière plus intuitive. Considérons, pour chaque point singulier \bar{x} d'une intégrale, un cercle sur la surface de RIEMANN, ayant le centre \bar{x} et le rayon $h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\epsilon)}$. On conclut facilement du théorème B' que deux cercles correspondants à des points singuliers \bar{x} assez éloignés n'ont aucun point commun, et on conclut du théorème C' que l'inégalité $|y| \leq |x|^{\sigma+\epsilon}$ a lieu à l'extérieur de ces cercles si $|x|$ est assez grand.

4. Nous étudions maintenant l'équation générale (I). Il est permis, comme on le sait, de supposer que les degrés p, q des fonctions P, Q par rapport à y sont liés par la relation $p=q+2$. Car si cette relation n'est pas remplie, on obtiendra, par la substitution $y = \alpha + \frac{1}{z}$, une équation différentielle pour laquelle elle a lieu, si α est une constante telle que $P(x, \alpha)$ et $Q(x, \alpha)$ ne sont pas nulles identiquement.

Supposons que $x=\infty$ soit un point ξ et étudions la croissance des intégrales dans le voisinage de ce point. Posons

$$P(x, y) = a_0 y^p + \dots + a_p$$

$$Q(x, y) = b_0 y^q + \dots + b_q$$

et

$$a_i = x^i \left(a_i^{(0)} + a_i^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right), \quad a_i^{(0)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

$$b_i = x^{ii} \left(b_i^{(0)} + b_i^{(1)} \frac{1}{x} + \dots \right), \quad b_i^{(0)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, q)$$

¹ Voir POINCARÉ, *Bulletin de la Société Mathématique*, 1883, et *Acta mathematica*, t. XXXI. *Acta mathematica*. 36. Imprimé le 3 février 1913.

les séries étant convergentes si $|x|$ est suffisamment grand. En posant

$$\frac{P}{Q} = y^2 x^{\nu_0 - \nu} \left(\frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}} + q(x, y) \right)$$

et en supposant que

$$|y| < |x|^{\sigma + \epsilon},$$

où σ désigne le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i} (\lambda_i - \lambda_0) \quad (i = 1, \dots, p)$$

$$\frac{1}{i} (\mu_i - \mu_0) \quad (i = 1, \dots, q)$$

et ϵ un nombre positif, on voit que l'inégalité

$$|q(x, y)| < |x|^{-\epsilon}$$

a lieu si $|x|$ est assez grand, ϵ étant un nombre positif plus petit que les nombres $\epsilon, 1$.

L'équation $Q(x, y) = 0$ donne, dans le voisinage de $x = \infty$ un certain nombre q' de séries

$$\beta^{(i)} = x^{\mu_i} \mathfrak{F}_i \left(x^{-\frac{1}{\mu_i}} \right), \quad (i = 1, \dots, q').$$

Nous posons $y = \beta^{(j)} + \frac{1}{z}$, et nous aurons pour z une équation différentielle de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_{nj} z^p + \dots + a_{pj}}{b_{rj} z^q + \dots + b_{qj}},$$

si r_j désigne l'ordre de multiplicité de la racine $\beta^{(j)}$ de l'équation $Q(x, y) = 0$ pour une valeur quelconque de x . Posons

$$a_{ij} = x^{\lambda_{ij}} \left(a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} x^{-\frac{1}{\mu_j}} + \dots \right), \quad a_{ij}^{(0)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, p)$$

$$b_{ij} = x^{\mu_{ij}} \left(b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} x^{-\frac{1}{\mu_j}} + \dots \right), \quad b_{ij}^{(0)} \neq 0 \quad (i = r_j, \dots, q)$$

les séries étant convergentes si $|x|$ est suffisamment grand.

Écrivons l'équation différentielle pour z sous la forme

$$\frac{dz}{dx} = z^{r_j+2} x^{\lambda_{0j}-\mu_{r_jj}} \left(\frac{a_{0j}^{(0)}}{b_{r_jj}^{(0)}} + q_j(x, z) \right)$$

et supposons que

$$|z| > |x|^{\sigma_j + \epsilon_j},$$

où σ_j désigne le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i} (\lambda_{ij} - \lambda_{0j}) \quad (i = 1, \dots, p)$$

$$\frac{1}{i - r_j} (\mu_{ij} - \mu_{r_jj}) \quad (i = r_j + 1, \dots, q)$$

et ϵ_j un nombre positif. Si $\bar{\epsilon}$ est un nombre positif plus petit que les nombres ϵ_j et 1, on voit que l'inégalité

$$|q_j(x, z)| < |x|^{-\bar{\epsilon}}$$

a lieu si $|x|$ est suffisamment grand.

Cela posé, considérons d'abord une branche d'intégrale y définie par prolongement analytique dans un certain domaine $|x| > r$, dans lequel les convergences et les inégalités précédentes ont lieu, et satisfaisant à la condition que les égalités $y = \beta^{(j)}(x)$ n'ont aucune racine à distance finie. La branche z définie par l'égalité $y = \beta^{(j)} + \frac{1}{z}$ n'a donc aucun point singulier à distance finie.

Rapportons nous à la démonstration du n:o 2 en partant de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = z^{r_j+2} x^{\lambda_{0j}-\mu_{r_jj}} \left(\frac{a_{0j}^{(0)}}{b_{r_jj}^{(0)}} + q_j(x, z) \right)$$

et en supposant que le nombre ϵ_j satisfait à l'inégalité

$$-(\lambda_{0j} - \mu_{r_jj}) - (r_j + 1)(\sigma_j + \epsilon_j) < 1.$$

On obtiendra facilement le théorème suivant:

Théorème A. *Pour tout point x à l'extérieur d'un cercle $|x| = r$ de rayon assez grand on a*

$$\left| \frac{1}{y - \beta^{(i)}} \right| < |x|^{\nu_i + \epsilon_i} \quad (i = 1, \dots, q'),$$

ces inégalités ayant lieu pour toute détermination de y et de $\beta^{(i)}$.

Considérons maintenant l'intégrale $(x - \bar{x})^{-1} \mathfrak{P}(x - \bar{x})$ qui pour $x = \bar{x}$ devient égale à ∞ , et l'intégrale

$$y = \bar{\beta}^{(i)} + (x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \bar{\mathfrak{P}}_i \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \right), \quad \bar{\mathfrak{P}}_i(0) \neq 0$$

qui pour $x = \bar{x}$ devient égale à $\bar{\beta}^{(i)} = \beta^{(i)}(\bar{x})$, et posons

$$y = \beta^{(i)} + (x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \mathfrak{P}_i \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \right).$$

Si le nombre ε satisfait à l'inégalité

$$-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon) < 1,$$

on démontre comme au n:o 3 le théorème suivant:

Théorème B*. *Si h est un nombre donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, la série $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$ converge pour*

$$|x - \bar{x}| < h |x|^{-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon)}$$

et la série $\mathfrak{P}_i \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \right)$ pour

$$|x - \bar{x}| < h |x|^{-(\lambda_0 - \mu_0 - \frac{1}{r_i+1}) - (\sigma_i + \varepsilon_i)}.$$

En effet, supposons p. ex. que le rayon de convergence ϱ de $y = (x - \bar{x})^{-1} \mathfrak{P}(x - \bar{x})$ soit plus petit que $h |x|^{-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon)}$. Pour $|x - \bar{x}| < \varrho$ on aura

$$y^{-1} = \frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}} (x - \bar{x})^{\lambda_0 - \mu_0} (1 + \bar{\varphi}_1(x, \bar{x}))$$

avec $|\bar{\varphi}_1(x, \bar{x})| < 2k\varepsilon'$. Si l'on prend $\varrho' < \varrho$ il existe donc un nombre G tel que $|y| < G$ pour $\varrho' < |x - \bar{x}| < \varrho$.

De plus on aura pour $|x - \bar{x}| < \varrho$

$$|y| > \left| \frac{b_0^{(0)}}{a_0^{(0)}} \right| \frac{|\bar{x}|^{\sigma + \varepsilon}}{h(1 + 2k\varepsilon')},$$

par suite

$$|Q(x, y)| > |b_0^{(0)}| |x|^{\mu_0} |y|^q (1 - |x|^{-\tau})$$

$$> \frac{1}{2} |b_0^{(0)}| |x|^{\mu_0} |y|^q,$$

si $|\bar{x}|$ est assez grand.

Or, il existe nécessairement sur la circonférence $|x - \bar{x}| = \rho$ un point x_1 tel que l'on ait ou bien $\lim_{x=x_1} y = \infty$, ou bien $\lim_{x=x_1} Q(x, y) = 0$. Cette contradiction démontre le théorème pour la série $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$. De la même manière on le démontre pour $\mathfrak{P}_i \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{v_i+1}} \right)$.

Prenons maintenant les nombres h, h_i de manière que $h \left| \frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}} \right| > 2, h_i (v_i + 1) \left| \frac{a_{v_i+1}^{(0)}}{b_{v_i+1}^{(0)}} \right| > 2$,

et soit $y = \mathfrak{P}(x - x_0)$ l'intégrale qui pour $x = x_0$ devient égale à y_0 , $Q(x_0, y_0)$ étant différent de zéro. Posons de plus $\frac{1}{y - \beta^{(i)}} = \mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ en choisissant une certaine détermination de $\beta^{(i)}$. On démontre comme au n° 3 le théorème suivant:

Théorème C*. Si $|x_0|$ est assez grand et si la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leq h |x_0|^{-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon)}$, on a nécessairement $|y_0| \leq |x_0|^{\sigma + \varepsilon}$. Si la série $\mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leq h_i |x_0|^{-(\lambda_{0i} - \mu_{v_i i}) - (v_i + 1)(\sigma_i + \varepsilon_i)}$, on a $\left| \frac{1}{y_0 - \beta^{(i)}(x_0)} \right| < |x_0|^{\sigma_i + \varepsilon_i}$.

Il importe pour le suivant de choisir les nombres $\varepsilon, \varepsilon_i$ de manière que tous les exposants

$$-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon), -(\lambda_{0i} - \mu_{v_i i}) - (v_i + 1)(\sigma_i + \varepsilon_i)$$

deviennent égaux. Si τ' désigne le plus grand nombre que l'on peut obtenir de cette manière, et si h' désigne le plus grand des nombres h, h_i , on peut énoncer, au lieu des théorèmes B*, C*, les théorèmes suivants qui sont un peu moins précis, mais se prêtent mieux pour les applications:

Théorème B. Si h est un nombre positif donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, les séries $\mathfrak{P}(x - \bar{x}), \mathfrak{P}_i \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{v_i+1}} \right)$ convergent pour

$$|x - \bar{x}| < h |\bar{x}|^{\tau'}.$$

Théorème C. Si $|x_0|$ est assez grand et si la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leq h' |x_0|^{\tau'}$, on a nécessairement $|y_0| \leq |x_0|^{\sigma + \varepsilon}$. Si la série $\mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leq h' |x_0|^{\tau'}$, on a $\left| \frac{1}{y_0 - \beta^{(i)}(x_0)} \right| \leq |x_0|^{\sigma_i + \varepsilon_i}$.

Introduisons maintenant une surface de RIEMANN appartenant à une intégrale donnée, et considérons pour chaque pôle \bar{x} un cercle ayant le centre x et le rayon $h'|x|^{r'}$. On voit que deux cercles correspondant à des pôles x assez éloignés n'ont aucun point commun, et que l'on a une inégalité de la forme $|y| < |x|^r$ pour tout point assez éloigné situé à l'extérieur de ces cercles.

Le nombre r s'obtient de la manière suivante. Si x est un point critique algébrique tel que $y - \beta^{(i)}$ s'annule pour $x = \bar{x}$, on a, pour $|x - \bar{x}| < h'|\bar{x}|^{r'}$, une égalité de la forme

$$-(y - \beta^{(i)})^{r_i + 1} = (r_i + 1) \frac{a_{0i}^{(i)}}{b_{0i}^{(i)}} (x - \bar{x}) x^{r_i - 1} (1 + g_i(x, \bar{x}))$$

avec $|g_i(x, \bar{x})| < 2k\varepsilon'$. Par suite, on aura une inégalité de la forme

$$|y| < |x|^r$$

à l'intérieur du cercle considéré. Le nombre r est le plus grand des nombres $r_i + \varepsilon$, r_i ($i = 1, \dots, q'$).

On aura facilement un énoncé analogue pour les quotients $\frac{1}{y - \beta^{(i)}}$, mais nous n'y insistons pas.

II. Étude d'une intégrale particulière à un nombre fini de déterminations.

5. Nous appliquons maintenant les résultats précédents à l'étude d'une intégrale de l'équation (1) qui satisfait à la condition suivante: si x_0 est un point quelconque, il n'existe qu'un nombre fini de séries de puissance de $x - x_0$ qui appartiennent à l'intégrale considérée. On voit facilement que ce nombre est le même pour tout point x_0 qui n'est pas un point singulier de l'intégrale. Nous le désignons par m . On dit que l'intégrale considérée est une fonction à m déterminations.

Nous commençons par l'étude d'une fonction uniforme qui satisfait à l'équation (1). Pour une telle fonction, M. PETROVITCH a démontré certains résultats intéressants:¹ supposons que l'on a fait au besoin une transformation linéaire $y = a + \frac{1}{z}$, de manière que les degrés p, q des fonctions P, Q par rapport à y sont liés par la relation $p = q + 2$; alors, si l'équation $Q(x, y) = 0$ en y a au moins trois racines distinctes, toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle. Si l'équation $Q(x, y) = 0$ n'a que deux racines distinctes, il ne peut y avoir deux intégrales uniformes qui soient des transcendentes distinctes. Enfin, si l'équation

¹ Voir É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 356.

$Q(x, y) = 0$ n'a qu'une seule racine, il ne peut y avoir plus de deux intégrales uniformes qui soient des transcendentes distinctes. Si $Q(x, y)$ est indépendante de y , on a une équation de RICCATI, et alors il ne peut y avoir plus de trois intégrales transcendentes distinctes. A l'aide du théorème A nous démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème 1. *Si l'équation (1) n'est pas une équation de Riccati, toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle.*

Soit $y = f(x)$ une fonction uniforme qui satisfait à l'équation (1). A l'exception des points ξ , cette fonction n'a d'autres points singuliers que des pôles. Il est facile à voir que $\frac{1}{Q(x, y)}$ est une fonction uniforme qui n'a aucun point singulier en dehors des points ξ . En effet, si \bar{x} est un pôle de $f(x)$ c'est un zéro de $\frac{1}{Q(x, y)}$, et si x_0 est un point régulier de $f(x)$ on a nécessairement $Q(x_0, f(x_0)) \neq 0$, car dans le cas contraire on aurait $\frac{dy}{dx} = \infty$ pour $x = x_0$, les expressions $P(x_0, f(x_0))$, $Q(x_0, f(x_0))$ ne pouvant pas être nulles en même temps si x_0 est différent des points ξ .

En s'appuyant sur le théorème de LAURENT on aura donc, dans le voisinage d'un point ξ ,

$$\frac{1}{Q(x, y)} = G\left(\frac{1}{x - \xi}\right) + \mathfrak{P}(x - \xi),$$

$G(u)$ étant une fonction entière de u . Or, il résulte du théorème A qu'il existe un nombre ϱ tel que

$$\left| \frac{1}{Q(x, y)} \right| < |x - \xi|^\varrho$$

pour tout point x dans un certain voisinage de ξ . Par suite, si $\varepsilon > 0$ on aura

$$|G(u)| < |u|^{-\varrho + \varepsilon}$$

pour toute valeur de u assez grande en valeur absolue. D'après un théorème connu il en résulte que $G(u)$ se réduit à un polynome.

Il est donc démontré que $\frac{1}{Q(x, y)}$ n'a d'autres points singuliers que des pôles, c'est donc une fonction rationnelle. Par suite, $f(x)$ est une fonction algébrique; comme elle est uniforme elle est donc rationnelle.

6. Nous étudions maintenant une intégrale à un nombre de déterminations qui est plus grand que 1. Nous considérons d'abord l'équation (1') (voir p. 300), et nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 2'. Si l'équation (1') ne se transforme pas à une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c$$

par une transformation de la forme

$$z = \frac{y^n + \beta_1 y^{n-1} + \dots + \beta_n}{y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \dots + \alpha_n},$$

les coefficients $a, b, c, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ étant des fonctions rationnelles de x , toute intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une fonction algébrique.

Ce théorème sera démontré par une démonstration indirecte: en ne faisant à priori aucune supposition sur la forme de l'équation différentielle, nous partons de la supposition, qu'il existe une intégrale *transcendante* à un nombre fini de déterminations, et nous en concluons que l'équation se transforme nécessairement à une équation de RICCATI de la manière indiquée.

Soit donc $f(x)$ une intégrale transcendante à un nombre fini m de déterminations. Il est évidemment permis de supposer que $p > 2$. Alors, il existe nécessairement une infinité de points singuliers de $f(x)$. En effet, à l'aide du théorème A' on démontre, comme au n:o précédent, que toute intégrale à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers est nécessairement une fonction algébrique.

Les points singuliers distincts des points ξ sont des points critiques algébriques. Il importe de former des expressions symétriques de certaines déterminations de $f(x)$ en nombre aussi petit que possible de manière que ces expressions définissent des fonctions qui sont uniformes au voisinage des dits points singuliers. On parvient à ce but de la manière suivante. Soient y_1, \dots, y_m m déterminations de $f(x)$ (m séries de puissances d'une même différence $x - x_0$). On démontre facilement qu'elles se répartissent en groupes à un même nombre n' d'éléments de la manière suivante: on peut venir d'un élément à un autre appartenant à un même groupe par prolongement analytique le long d'un chemin fermé qui ne tourne autour d'aucun point ξ ,¹ mais on ne peut pas venir de cette manière d'un élément y_a à un autre élément y_b qui n'appartient pas au groupe de y_a . On dit que les éléments d'un même groupe se permutent autour des points singuliers de $f(x)$ distincts des points ξ . On voit facilement que le nombre n' est le même pour tout système de m déterminations de $f(x)$.

¹ On dit qu'un chemin fermé ne tourne pas autour du point a , si l'on peut le réduire à un point par déformation continue sans qu'il passe par le point a (cf. la Note citée de M. PAINLEVÉ, p. 147).

Si l'on prend certains points singuliers ξ' de $f(x)$ en nombre fini distincts des points ξ , et si l'on suppose que les chemins fermés ne tournent non plus autour de ces points ξ' , on pourrait obtenir une valeur plus petite de n' . Nous désignons par n le plus petit nombre que l'on peut obtenir en ajoutant de cette manière aux points ξ un nombre fini de points singuliers de $f(x)$. A chaque point x_0 distinct des points ξ et des points singuliers de $f(x)$ correspond donc un certain nombre de groupes à n éléments en lesquels se répartissent les séries de puissance de $x - x_0$ appartenant à $f(x)$, les éléments d'un même groupe se permutant autour des points singuliers de $f(x)$ qui sont distincts des points ξ et d'un nombre *fini* d'autres points choisis arbitrairement.

Supposons que les groupes sont

$$\begin{aligned} & y_1, \dots, y_n, \\ & y_{n+1}, \dots, y_{2n}, \\ & \dots \dots \dots \\ & y_{m-n+1}, \dots, y_m, \end{aligned}$$

et considérons les fonctions symétriques élémentaires $f_\nu(y_1, \dots, y_n)$ ($\nu = 1, \dots, n$) de y_1, \dots, y_n ainsi que $f_\nu(y_{n+1}, \dots, y_{2n}), \dots, f_\nu(y_{m-n+1}, \dots, y_m)$ ($\nu = 1, \dots, n$). Les expressions $f_\nu(y_1, \dots, y_n), f_\nu(y_{n+1}, \dots, y_{2n}), \dots, f_\nu(y_{m-n+1}, \dots, y_m)$ définissent des éléments d'une même fonction $f_\nu(x)$. Il est facile à voir que cette fonction n'a, en dehors des points ξ et des points singuliers ajoutés à ces points, d'autres points singuliers que des pôles, ce que nous exprimons plus brièvement en disant que $f_\nu(x)$ est de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés. En effet, prenons \bar{x} distinct des points ξ et des points ajoutés et considérons les

deux cas suivants: 1: o il n'existe aucune série de la forme $(x - \bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}_1 \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{p-1}} \right)$ qui appartient à $f(x)$, 2: o il existe une telle série. Dans le premier cas le point \bar{x} est un point régulier de toutes les fonctions $f_\nu(x)$. Dans le second cas, les $p-1$ déterminations de la série en question et certaines séries de puissance de $x - \bar{x}$ en nombre de $n - p + 1$ constituent un système de n déterminations de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés; la $\nu^{\text{ième}}$ expression symétrique de ces n déterminations, qui définit une branche de $f_\nu(x)$, s'écrit sous la forme

$$(x - \bar{x})^{-\frac{\nu}{p-1}} \mathfrak{P}_1 \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{p-1}} \right),$$

où les puissances fractionnaires disparaissent. On voit donc que \bar{x} est au plus un pôle de $f_\nu(x)$.

Si $\nu < p-1$ les puissances négatives disparaissent. Les fonctions $f_1(x), \dots, f_{p-2}(x)$ n'ont donc aucun point singulier en dehors des points ξ . Cette remarque et les théorèmes B' , C' nous permettront de démontrer la proposition suivante:

Les fonctions $f_1(x), \dots, f_{p-2}(x)$ sont des fonctions algébriques.

Nous supposons que $x = \infty$ soit un point ξ et nous démontrons qu'il existe un nombre G tel que l'inégalité

$$|f_\nu(x)| < G|x|^{\nu(\sigma+\epsilon)}$$

a lieu pour tout point x assez éloigné.

Prenons à cet effet le point x_0 assez éloigné distinct des points singuliers de $f(x)$, soient $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ ($\nu=1, \dots, n$) n éléments de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés et posons $f_\nu(\mathfrak{P}_1(x-x_0), \dots, \mathfrak{P}_n(x-x_0)) = \mathfrak{P}^{(\nu)}(x-x_0)$ ($\nu=1, \dots, p-2$).

Nous cherchons d'abord le nombre maximum de points singuliers que l'on peut rencontrer en prolongeant les séries $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ ($\nu=1, \dots, n$) dans le cercle

$$|x-x_0| < \frac{4(n+p-1)}{p-1} h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\epsilon)}.$$

Supposons qu'il existe un point singulier \bar{x} de $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ dans ce cercle. Dans le voisinage de \bar{x} on aura donc

$$\mathfrak{P}_1(x-x_0) = (x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

Il résulte du théorème B' que la série au second membre converge pour

$$|x-\bar{x}| < \frac{8(n+p-1)}{p-1} h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\epsilon)}$$

si $|\bar{x}|$ est assez grand. Par suite, elle converge dans le cercle considéré tout-à-l'heure si $|x_0|$ est assez grand. En prolongeant la série $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ dans ce cercle on ne peut donc rencontrer aucun point singulier autre que \bar{x} . Or, nous savons que $p-1$ des séries $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ ($\nu=1, \dots, n$) admettent le point singulier \bar{x} . On voit donc que le nombre des points singuliers que l'on rencontre en prolongeant ces séries dans le cercle considéré est au plus égal à $\frac{n}{p-1}$.

On en conclut qu'il existe dans ce cercle une couronne circulaire de centre x_0 et de largeur $4h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\epsilon)}$ qui ne contient aucun des dits points singuliers.

Prenons un point x_1 sur la circonférence de centre x_0 dont le rayon est la valeur moyenne des deux rayons de la couronne. Le cercle $|x - x_1| < 2h|x_0|^{-\lambda_0 - (p-1)(\sigma + \epsilon)}$ ne contient donc aucun des points singuliers considérés. Par suite, en prolongeant les séries $\mathfrak{P}_\nu(x - x_0)$ ($\nu = 1, \dots, n$) le long d'un chemin de x_0 à x_1 à l'intérieur du cercle $|x - x_0| < \frac{4(n + p - 1)}{p - 1}h|x_0|^{-\lambda_0 - (p-1)(\sigma + \epsilon)}$ on obtiendra n séries $\mathfrak{P}_\nu(x - x_1)$ ($\nu = 1, \dots, n$) qui convergent pour $|x - x_1| < 2h|x_0|^{-\lambda_0 - (p-1)(\sigma + \epsilon)}$. Elles convergent donc pour $|x - x_1| < h|x_1|^{-\lambda_0 - (p-1)(\sigma + \epsilon)}$, si l'on a choisi x_0 assez éloigné, et il résulte maintenant du théorème C' que

$$|\mathfrak{P}_\nu(0)| \leq |x_1|^{\sigma + \epsilon} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Si $|x_0|$ est assez grand, il résulte de la supposition que les séries $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x - x_0)$ ($\nu = 1, \dots, p - 2$) convergent pour $|x - x_0| \leq |x_1 - x_0|$. On peut donc écrire

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1 - x_0)| \leq \binom{n}{\nu} |x_1|^{\nu(\sigma + \epsilon)} \quad (\nu = 1, \dots, p - 2)$$

et ces inégalités ont lieu pour tout point x_1 de la circonférence considérée. Si l'on introduit x_0 au lieu de x_1 dans les seconds membres on aura des inégalités de la forme

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1 - x_0)| < g|x_0|^{\nu(\sigma + \epsilon)} \quad (\nu = 1, \dots, p - 2)$$

où g désigne un certain nombre qui dépend de x_0 mais pas de x_1 et qui reste, comme on le voit facilement, plus petit qu'un certain nombre G quand x_0 tend vers l'infini.

Comme les dernières inégalités ont lieu sur toute une circonférence de centre x_0 , on aura aussi

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)| < G|x_0|^{\nu(\sigma + \epsilon)} \quad (\nu = 1, \dots, p - 2).$$

Comme x_0 est un point quelconque distinct de certains points isolés (points singuliers de $f(x)$) on aura donc

$$|f_\nu(x)| < G|x|^{\nu(\sigma + \epsilon)} \quad (\nu = 1, \dots, p - 2)$$

pour tout point x assez éloigné et pour toute détermination de $f_\nu(x)$.

Comme les fonctions $f_\nu(x)$ ont un nombre fini de déterminations on peut maintenant démontrer, comme au n° précédent, que le point $x = \infty$ est au plus un point singulier algébrique pour les fonctions $f_1(x), \dots, f_{p-2}(x)$, et il est donc démontré que ces fonctions n'ont d'autres points singuliers que des points

singuliers algébriques. Comme elles ont un nombre fini de branches elles sont donc des fonctions algébriques.

7. Nous étudions ensuite les fonctions $f_{p-1}(x), \dots, f_n(x)$. A cet effet, nous déduisons d'abord un système d'équations différentielles pour $f_1(x), \dots, f_n(x)$.

Soit x_0 un point distinct des points ξ et considérons n séries de puissance de $x - x_0$: y_1, \dots, y_n qui satisfont à l'équation (1') (certaines de ces séries pouvant être identiques). Désignons par z_1, \dots, z_n les fonctions symétriques élémentaires de y_1, \dots, y_n . En dérivant l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n = 0,$$

où y désigne l'une quelconque des séries y_1, \dots, y_n , et en s'appuyant sur l'équation (1') on obtiendra

$$(n y^{n-1} + (n-1) z_1 y^{n-2} + \dots + z_{n-1}) (a_0 y^p + \dots + a_p) + \frac{dz_1}{dx} y^{n-1} + \dots + \frac{dz_n}{dx} = 0.$$

Ajoutons à cette équation l'équation suivante

$$(B_1 y^{p-1} + \dots + B_p) (y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n) = 0,$$

B_1, \dots, B_p étant déterminés de manière que l'on obtienne une équation de degré $n-1$. Cette équation de degré $n-1$ aura la forme

$$\sum_{r=1}^n (z_r B_p + \dots + z_{r+p-1} B_1 + A_r) y^{n-r} = 0,$$

où

$$A_r = (n-r+1) a_p z_{r-1} + \dots + (n-r-p+1) a_0 z_{r+p-1} + \frac{dz_r}{dx}$$

$$(r = 1, \dots, n)$$

et $z_r = 0$ si $r > n$. Elle est remplie pour $y = y_1, \dots, y = y_n$, et si certaines de ces séries sont identiques, la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale à n . Par suite, elle se réduit à une identité et on aura donc les équations suivantes

$$z_r B_p + \dots + z_{r+p-1} B_1 + A_r = 0 \quad (r = 1, \dots, n).$$

On voit de suite que $B_1, \dots, B_{p-1}, B_p + (p-1) a_0 z_{p-1}$ s'écrivent comme des

fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, z_1, \dots, z_{p-2}$. Les dernières équations peuvent donc s'écrire, si l'on introduit les expressions pour A_1, \dots, A_n :

$$(2) \quad \frac{dz_\nu}{dx} = -(p-1)a_0 z_{p-1} z_\nu + \sum_{\mu=p-1}^n \alpha_\mu^{(\nu)} z_\mu + \alpha^{(\nu)},$$

$$(\nu = 1, \dots, n)$$

les coefficients $\alpha_\mu^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}$ étant des fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, z_1, \dots, z_{p-2}$. C'est le système d'équations différentielles que nous voulions obtenir.

Inversement, si z_1, \dots, z_n est une solution quelconque du système (2), toute solution de l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1'). Car soient $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ les valeurs pour $x = x_0$ de ces solutions. Les fonctions symétriques élémentaires des intégrales de (1') correspondant aux valeurs initiales $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ pour $x = x_0$ constituent une solution du système (2) correspondant à des valeurs initiales pour $x = x_0$ égales aux valeurs pour $x = x_0$ de z_1, \dots, z_n . Cette solution est donc identique à la solution z_1, \dots, z_n , ce qui démontre notre assertion.

8. Pour préparer l'étude des fonctions $f_{p-1}(x), \dots, f_n(x)$ dans le cas de n quelconque nous étudions d'abord quelques cas particuliers. Afin d'avoir des valeurs aussi petites que possibles de n nous considérons l'équation

$$(1'') \quad \frac{dy}{dx} = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3$$

pour laquelle $p = 3$ (pour p quelconque on a $n \geq p - 1$), et nous étudions les cas $n = 2, 3, 4$.

Pour ces valeurs de n le système (2) s'écrit

$$n = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = (2a_1 - 3a_0 z_1) z_2 + a_0 z_1^3 - a_1 z_1^2 + a_2 z_1 - 2a_3 \\ \frac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 2a_2) z_2 - a_3 z_1 \end{array} \right.$$

$$n = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = 3a_0 z_3 + (2a_1 - 3a_0 z_1) z_2 + a_0 z_1^3 - a_1 z_1^2 + a_2 z_1 - 3a_3 \\ \frac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + (3a_1 - a_0 z_1) z_3 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 2a_2) z_2 - 2a_3 z_1 \\ \frac{dz_3}{dx} = -2a_0 z_2 z_3 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 3a_2) z_3 - a_3 z_2 \end{array} \right.$$

$$n=4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dx} = 3a_0z_3 + (2a_1 - 3a_0z_1)z_2 + a_0z_1^2 - a_1z_1^2 + a_2z_1 - 4a_3 \\ \frac{dz_2}{dx} = -2a_0z_2^2 + 4a_0z_4 + (3a_1 - a_0z_1)z_3 + (a_0z_1^2 - a_1z_1 + 2a_2)z_2 - 3a_3z_1 \\ \frac{dz_3}{dx} = -2a_0z_2z_3 + (4a_1 - a_0z_1)z_4 + (a_0z_1^2 - a_1z_1 + 3a_2)z_3 - 2a_3z_2 \\ \frac{dz_4}{dx} = -2a_0z_2z_4 + (a_0z_1^2 - a_1z_1 + 4a_2)z_4 - a_3z_3 \end{array} \right.$$

Etudions d'abord le cas $n=2$. La fonction $f_1(x)$ est une fonction algébrique. Au contraire, $f_2(x)$ est nécessairement transcendante, sinon $f(x)$ serait algébrique. Si z_1, z_2 sont des éléments de $f_1(x)$, $f_2(x)$ resp., la première équation du système (2) doit donc être indépendante de z_2 , par suite

$$z_1 = \frac{2a_1}{3a_0},$$

$$\frac{dz_1}{dx} = a_0z_1^2 - a_1z_1^2 + a_2z_1 - 2a_3,$$

ce qui donne une équation de condition pour a_0, a_1, a_2, a_3 . Si cette condition est remplie, le système (2) se réduit pour $z_1 = \frac{2a_1}{3a_0}$ à la seconde équation seule:

$$\frac{dz_2}{dx} = -2a_0z_2^2 + (a_0z_1^2 - a_1z_1 + 2a_2)z_2 - a_3z_1.$$

Par suite, si l'on pose $z_2 = -z$ on aura le résultat suivant:

Si z est une solution quelconque de l'équation de RICCATI

$$\frac{dz}{dx} = 2a_0z^2 + (a_0z_1^2 - a_1z_1 + 2a_2)z + a_3z_1$$

toute solution de l'équation

$$y^2 + z_1y = z$$

satisfait à l'équation différentielle (1'').

Par là, le théorème 2' est démontré dans le cas $n=2$.

C'est ce cas qui a été étudié par M. PAINLEVÉ dans la Note citée. On voit comment la démonstration précédente est plus simple que celle de M. PAINLEVÉ. Pour l'équation générale (1) la démonstration devient un peu plus compliquée,

mais la complication est principalement de nature formelle, comme nous allons le voir dans le n:o 12.

Considérons maintenant le cas $n = 3$. La fonction $f_1(x)$ est toujours une fonction algébrique, mais $f_2(x)$ et $f_3(x)$ ne sont pas toutes deux des fonctions algébriques. Si z_1, z_2, z_3 sont des éléments des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ resp., la première équation du système (2) donne pour z_3 une expression linéaire de z_1 dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques. Il est donc impossible que $f_2(x)$ soit une fonction algébrique. Au contraire, $f_3(x)$ pourrait être une fonction algébrique; à cet effet il faut que $z_1 = \frac{2a_1}{3a_0}, z_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}$. Ce cas se traite facilement comme le cas $n = 2$: la première et la troisième équation du système (2) donnent deux équations de conditions pour a_0, a_1, a_2, a_3 et, si ces conditions sont remplies, le système se réduit pour $z_1 = \frac{2a_1}{3a_0}, z_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}$ à la seconde équation seule, qui est une équation de RICCATI.

Supposons que $z_1 \neq \frac{2a_1}{3a_0}$. Nous introduisons l'expression de z_3 donnée par la première équation du système (2) dans les deux autres équations. Nous aurons deux équations de la forme

$$\frac{dz_2}{dx} = -2a_0z_2^2 + \alpha z_2 + \beta,$$

α, β étant des expressions rationnelles de a_0, a_1, a_2, a_3, z_1 et leurs dérivées. Ces deux équations doivent être identiques car dans le cas contraire on aurait, en les retranchant l'une de l'autre, pour z_2 un élément d'une fonction algébrique. Par suite, nous aurons deux équations différentielles pour z_1 . Par des calculs, qui sont très longues, on peut déduire de ces équations une équation de condition pour a_0, a_1, a_2, a_3 et pour z_1 une expression rationnelle de a_0, a_1, a_2, a_3 et leurs dérivées, soit $z_1 = \gamma$.¹ Si la dite condition est remplie, le système (2) se réduit pour $z_1 = \gamma$ à la seule équation $\frac{dz_2}{dx} = -2a_0z_2^2 + \alpha z_2 + \beta$ écrite plus haut et à une équation $z_3 = \delta z_2 + \varepsilon$, δ, ε étant des expressions de la même forme que α, β, γ . Par suite, nous aurons le résultat suivant qui démontre le théorème 2':

Si z est une solution quelconque de l'équation de RICCATI

$$\frac{dz}{dx} = -2a_0z^2 + \alpha z + \beta$$

¹ Nous n'essayons pas d'effectuer les calculs, car un raisonnement de M. PAINLEVÉ, que nous allons reproduire dans le cas général, montre que z_1 doit être une fonction rationnelle.

toute solution de l'équation

$$\frac{y'' + \gamma y' + \epsilon}{y + \delta} = z$$

satisfait à l'équation différentielle (1'').

Considérons maintenant le cas $n = 4$. Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont des éléments des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ resp., la première équation du système (2) donne pour z_3 une expression linéaire de z_2 dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques. En mettant cette expression dans les deux équations suivantes du même système on trouve

$$4a_0 z_4 = 2a_0 z_2^2 + \frac{dz_2}{dx} + \alpha z_2 + \beta,$$

$$(10a_1 - 3a_0 u)z_4 = 3u \left(2a_0 z_2^2 + \frac{dz_2}{dx} \right) + \alpha_1 z_2 + \beta_1,$$

où $u = z_1 - \frac{2a_1}{3a_0}$ et $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ sont des expressions rationnelles de a_0, a_1, a_2, a_3, z_1 et de leurs dérivées. En multipliant la première de ces équations par $3u$ et retranchant de la seconde on aura

$$(2a_1 - 3a_0 u)z_4 = \alpha_2 z_2 + \beta_2.$$

Si $u \neq \frac{2a_1}{3a_0}$ on aura donc pour z_3 et z_4 des expressions linéaires de z_2 , et on peut ensuite raisonner comme dans le cas $n = 3$.

Mais nous devons aussi étudier le cas $u = \frac{2a_1}{3a_0}$. Alors, on a nécessairement $\alpha_2 = 0$ car dans le cas contraire on aurait pour z_2 , et par suite aussi pour z_3, z_4 (en vertu des deux premières équations du système (2)), un élément d'une fonction algébrique. On trouve facilement que $\alpha_2 = \frac{du}{dx} - a_0 u^3 + a_1 u^2 - a_2 u + 2a_3$, et on aura donc

$$\frac{du}{dx} = a_0 u^3 - a_1 u^2 + a_2 u - 2a_3,$$

ce qui donne une équation de condition pour a_0, a_1, a_2, a_3 . On voit que c'est la condition qui caractérisait le cas $n = 2$. L'équation (1'') doit donc se transformer à l'équation de RICCATI

$$\frac{dz}{dx} = 2a_0 z^2 + (a_0 u^2 - a_1 u + 2a_2)z + a_3 u$$

par la transformation

$$y^2 + uy = z.$$

Or, on voit immédiatement que tous les points singuliers de cette équation de RICCATI sont des points ξ . Par suite, toute intégrale de (1'') admet au plus deux déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ , ce qui est contre l'hypothèse $n = 4$. Il est donc impossible que l'on ait $u = \frac{2}{3} \frac{a_1}{a_0}$.

Par suite, le théorème 2' est démontré pour $n = 4$.

Faisons une remarque d'un certain intérêt se rapportant au cas étudié tout-à-l'heure. Il résulte que le cas $u = \frac{2}{3} \frac{a_1}{a_0}$ a lieu effectivement si $n = 2$, si l'on part de quatre déterminations y_1, y_2, y_3, y_4 de $f(x)$, y_1 et y_2 d'une part et y_3, y_4 d'autre part se permutant autour des points singuliers distincts des points ξ , et si z_1, z_2, z_3, z_4 sont les expressions symétriques de y_1, y_2, y_3, y_4 . Comme $z_1 = 2u$ on voit facilement que le système (2) se réduit à l'équation linéaire

$$z_3 = uz_2 - u^3$$

et au système suivant d'équations différentielles

$$\frac{dt_1}{dx} = -2a_0t_1^2 + (a_0u^2 - a_1u + 2a_2)t_1 + 4a_0t_2 - 2a_3u,$$

$$\frac{dt_2}{dx} = 2a_0t_1t_2 + 2(a_0u^2 - a_1u + 2a_2)t_2 - a_1ut_1.$$

où nous avons posé

$$t_1 = z_2 - u^2, \quad t_2 = z_1.$$

Par suite, si t_1, t_2 est une solution de ce système, toute solution de l'équation

$$y^4 + 2uy^3 + (t_1 + u^2)y^2 + ut_1y + t_2 = 0$$

satisfait à l'équation (1''). On voit le sens de ce résultat si l'on introduit les racines v_1, v_2 de l'équation

$$v^2 + t_1v + t_2 = 0.$$

Alors, l'équation algébrique en y s'écrit

$$(y^2 + uy - v_1)(y^2 + uy - v_2) = 0.$$

De plus, le système différentiel pour t_1, t_2 est le système différentiel pour les fonctions symétriques de deux solutions v_1, v_2 de l'équation de RICCATI

$$\frac{dv}{dx} = 2a_0 v^2 + (a_0 u^2 - a_1 u + 2a_2) v + a_3 u.$$

Par suite, le résultat énoncé tout-à-l'heure dit simplement que toute solution de l'équation

$$(y^2 + uy - v_1)(y^2 + uy - v_2) = 0$$

satisfait à l'équation (1'') si v_1, v_2 sont deux intégrales de cette équation de RICCATI.

On retrouve, en étudiant le cas de n quelconque, la nécessité d'étudier la supposition que le système (2) ne se réduise pas à une seule équation différentielle. Pour $n=4$ nous avons vu que cette supposition entraîne l'égalité $n=2$, et la démonstration était essentiellement basée de ce que les calculs, dans le cas $n=2$, étaient très simples. Pour n quelconque les calculs devient très compliqués; c'est pourquoi nous devons trouver alors une autre démonstration.

9. Dans l'étude suivante des fonctions $f_{p-1}(x), \dots, f_n(x)$ nous désignons par y_1, \dots, y_n n déterminations — séries de puissance d'une même différence $x - x_0$, où x_0 est différent des points ξ et des points ajoutés — de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, par $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ les séries définies par les expressions symétriques de $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ et par $\bar{\alpha}_\mu^{(v)}, \bar{\alpha}^{(v)}$ les séries que l'on obtient en posant $z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_{p-2} = \bar{z}_{p-2}$ dans les expressions $\alpha_\mu^{(v)}, \alpha^{(v)}$.

Il résulte de la proposition démontrée au n:o 6 que $\bar{\alpha}_\mu^{(v)}, \bar{\alpha}^{(v)}$ sont des éléments de fonctions algébriques.

Introduisons dans le système (2) $z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_n = \bar{z}_n$. Les $p-2$ premières équations donnent des relations linéaires entre $\bar{z}_{p-1}, \dots, \bar{z}_n$ avec coefficients qui sont des éléments de fonctions algébriques. Les fonctions $f_{p-1}(x), \dots, f_n(x)$ ne sont donc pas des transcendentes distinctes. En employant les $n-p+2$ dernières équations du système (2) on pourra obtenir des relations linéaires nouvelles. En effet, partant d'une relation linéaire

$$\beta_{p-1} z_{p-1} + \dots + \beta_n z_n = \beta$$

et dérivant on obtiendra

$$\sum_{\nu=p-1}^n \frac{d\beta_\nu}{dx} z_\nu - (p-1) a_0 z_{p-1} \sum_{\nu=p-1}^n \beta_\nu z_\nu + \sum_{\nu=p-1}^n \beta_\nu \left(\sum_{\mu=p-1}^n \alpha_\mu^{(\nu)} z_\mu + \alpha^{(\nu)} \right) = \frac{d\beta}{dx},$$

donc

$$\sum_{\mu=p-1}^n \left(\frac{d\beta_\mu}{dx} + \sum_{\nu=p-1}^n \alpha_\mu^{(\nu)} \beta_\nu \right) z_\mu - (p-1) a_0 \beta z_{p-1} + \sum_{\nu=p-1}^n \alpha^{(\nu)} \beta_\nu = \frac{d\beta}{dx} \quad (1).$$

et c'est une relation linéaire entre z_{p-1}, \dots, z_n dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques en même temps que $\beta_{p-1}, \dots, \beta_n$.

Faisons ces opérations en partant de chacune des relations linéaires données par les $p-2$ premières équations du système (2) et en partant ensuite des relations nouvelles que l'on pourra obtenir par ces opérations, et ainsi de suite. Il est facile à voir que l'on ne peut obtenir de cette manière plus de $n-p+1$ relations distinctes. Car si l'on obtenait $n-p+2$ relations résolubles par rapport à $\bar{z}_{p-1}, \dots, \bar{z}_n$, toutes ces séries seraient des éléments de fonctions algébriques. Par suite, $f(x)$ serait une fonction algébrique, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce résultat entraîne une conséquence importante. Désignons par π le nombre des relations distinctes, et soient

$$\beta_{p-1}^{(\nu)} z_{p-1} + \dots + \beta_n^{(\nu)} z_n = \beta^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \dots, \pi)$$

ces relations. Considérons les équations

$$(3) \quad \beta_{p-1}^{(\nu)} z_{p-1} + \dots + \beta_n^{(\nu)} z_n = \beta^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \dots, r),$$

supposons qu'elles peuvent être résolues par rapport à $z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_r}$ et mettons les expressions que l'on obtient par la résolution dans celles des équations

$$\frac{dz_\nu}{dx} = -(p-1) a_0 z_{p-1} z_\nu + \sum_{\mu=p-1}^n \alpha_\mu^{(\nu)} z_\mu + \bar{\alpha}^{(\nu)} \quad (\nu = p-1, \dots, n)$$

qui correspondent aux valeurs de ν distinctes de μ_1, \dots, μ_r . Désignant ces valeurs par $\mu'_1, \dots, \mu'_{r'}$ on aura un système d'équations différentielles de la forme

$$(4) \quad \frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx} = -(p-1) a_0 z_{p-1} z_{\mu'_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{r'} b_{\lambda \nu} z_{\mu'_\lambda} + c_\nu \quad (\nu = 1, \dots, r'),$$

où z_{p-1} doit être remplacé par son expression si $p-1$ est un des nombres μ_1, \dots, μ_π . Nous démontrons maintenant la proposition suivante:

Si $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_\pi}$ est une solution quelconque du système (4) et si $z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_\pi}$ sont déterminées par les équations (3), toute solution de l'équation

$$(5) \quad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z_{p-1} y^{n-p+1} + \dots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1').

Si l'on pose

$$\frac{dz_v}{dx} + (p-1)a_0 z_{p-1} z_v - \sum_{\mu=p-1}^n \alpha_{\mu}^{(v)} z_{\mu} - \bar{\alpha}^{(v)} = J_v \quad (v = p-1, \dots, n)$$

il résulte de la supposition, si l'on voit à la loi de formation du système (4), que les équations $J_{\mu'_1} = 0, \dots, J_{\mu'_\pi} = 0$ sont remplies. Partons alors de l'équation

$$\beta_{p-1}^{(\lambda)} z_{p-1} + \dots + \beta_n^{(\lambda)} z_n = \beta^{(\lambda)}$$

et faisons les opérations par lesquelles nous déduisons successivement les relations linéaires entre $\bar{z}_{p-1}, \dots, \bar{z}_n$; on aura

$$\sum_{\mu=p-1}^n \left(\frac{d\beta_{\mu}^{(\lambda)}}{dx} + \sum_{v=p-1}^n \bar{\alpha}_{\mu}^{(v)} \beta_v^{(\lambda)} \right) z_{\mu} - (p-1)a_0 \beta^{(\lambda)} z_{p-1} + \sum_{v=p-1}^n \alpha^{(v)} \beta_v^{(\lambda)} - \frac{d\beta^{(\lambda)}}{dx} = \sum_{v=p-1}^n \beta_v^{(\lambda)} J_v.$$

Or, le premier membre peut s'écrire comme une expression linéaire et homogène des expressions $\beta_{p-1}^{(\lambda)} z_{p-1} + \dots + \beta_n^{(\lambda)} z_n - \beta^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, \dots, \pi$), il est donc nul. Par suite, on aura les équations

$$\sum_{v=p-1}^n \beta_v^{(\lambda)} J_v = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, \pi).$$

En posant ici $J_{\mu'_1} = 0, \dots, J_{\mu'_\pi} = 0$ on aura

$$\beta_{\mu_1}^{(\lambda)} J_{\mu_1} + \dots + \beta_{\mu_\pi}^{(\lambda)} J_{\mu_\pi} = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, \pi),$$

d'où l'on conclut que les équations

$$J_{\mu_1} = 0, \dots, J_{\mu_\pi} = 0$$

sont aussi remplies. Par là, il est démontré que $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{p-2}, z_{p-1}, \dots, z_n$ est une solution du système (2). Par suite, toute solution de l'équation (5) satisfait à l'équation différentielle (1').

On voit donc que l'intégration de l'équation (1') est réduite, par les équations (3), (5), à l'intégration du système (4).

Démontrons qu'il est permis de supposer que $p-1$ est un des nombres $\mu'_1, \dots, \mu'_{n'}$. Si $p-1$ est un des nombres μ_1, \dots, μ_n , on a pour z_{p-1} une expression linéaire en $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{n'}}$. Si cette expression dépend effectivement de certaines des $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{n'}}$, on peut résoudre par rapport à l'une d'elles et alors, z_{p-1} appartient aux $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{n'}}$. Si l'expression considérée ne dépend pas de $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{n'}}$, on aura z_{p-1} égale à un élément de fonction algébrique. Comme z_{p-1}, \dots, z_n satisfont aux équations (3), on voit donc que \bar{z}_{p-1} doit être élément d'une fonction algébrique. Or, ceci est impossible, car il est facile à voir que $f_{p-1}(x)$ a nécessairement une infinité de points singuliers. C'est ce qui résulte de ce que $f(x)$ a une infinité de points singuliers. Car si \bar{x} est un point singulier de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés, il existe une série de la forme $(x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P} \left((x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \right)$, avec $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, qui appartient à $f(x)$, et si l'on forme la $(p-1)$:ième fonction symétrique des $p-1$ déterminations de cette série et de $n-p+1$ séries de puissance de $x-\bar{x}$ qui se permutent avec ces déterminations autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, on aura un élément de $f_{p-1}(x)$ de la forme

$$\frac{[\mathfrak{P}(0)]^{p-1}}{x-\bar{x}} + \mathfrak{P}_1(x-\bar{x})$$

ayant x comme pôle. Tout point singulier de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés est donc un pôle de $f_{p-1}(x)$. Par là, il est démontré que z_{p-1} dépend nécessairement de certaines des $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{n'}}$, il est donc permis de supposer que $p-1$ est un des nombres $\mu'_1, \dots, \mu'_{n'}$. Nous supposons que $p-1 = \mu'_1$. Le système (4) s'écrit donc

$$\frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx} = -(p-1)a_0 z_{\mu'_1} z_{\mu'_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{n'} b_{\lambda\nu} z_{\mu'_\lambda} + c_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n').$$

10. L'intégration d'un tel système est bien connue.¹ L'intégrale générale s'écrit

$$z_{\mu'_\nu} = \int \int_{\bar{x}}^{\bar{z}_{\mu'_\nu}} \quad (\nu = 1, \dots, n')$$

$\int, \int_{\bar{x}}^{\bar{z}_{\mu'_\nu}}$ ($\nu = 1, \dots, n'$) étant l'intégrale générale du système linéaire

¹ Voir p. ex. LIE-SCHEFFERS, *Continuierliche Gruppen*, p. 780.

$$\frac{d\tilde{z}}{dx} = (p-1) a_0 \tilde{z}_{\mu'_1}$$

$$\frac{d\tilde{z}_{\mu'_v}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_{\lambda v} \tilde{z}_{\mu'_\lambda} + c_v \tilde{z} \quad (v=1, \dots, \pi').$$

Les coefficients $b_{\lambda v}, c_v$ sont des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, z_1, \dots, z_{p-1}$ et de leurs dérivées, ils définissent donc des éléments de fonctions algébriques. Il est évidemment permis de supposer que les points singuliers de ces fonctions appartiennent aux points que nous avons ajoutés aux points ξ . Par suite, écrivant

$$\tilde{z} = \xi_0 C_0 + \xi_1 C_1 + \dots + \xi_{\pi'} C_{\pi'},$$

$$\tilde{z}_\mu = \xi_{\mu 0} C_0 + \xi_{\mu 1} C_1 + \dots + \xi_{\mu \pi'} C_{\pi'} \quad (\mu = \mu'_1, \dots, \mu'_{\pi'}),$$

où $C_0, C_1, \dots, C_{\pi'}$ sont les constantes d'intégration, les fonctions $\xi_v, \xi_{\mu v}$ sont de caractère entière en dehors des points ξ et des points ajoutés.

Il est facile d'en conclure que le système (4) se réduit nécessairement à une seule équation. En effet, supposons que $\pi' > 1$. Introduisons dans les équations

(3) $z_{\mu'_v} = \frac{\tilde{z}_{\mu'_v}}{\tilde{z}} \quad (v=1, \dots, \pi')$, désignons par $\frac{\tilde{z}_{\mu'_v}}{\tilde{z}} \quad (v=1, \dots, \pi')$ les expressions que l'on trouve pour $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{\pi'}}$ et posons

$$\tilde{z}_\mu = \xi_{\mu 0} C_0 + \xi_{\mu 1} C_1 + \dots + \xi_{\mu \pi'} C_{\pi'} \quad (\mu = \mu'_1, \dots, \mu'_{\pi'}).$$

L'équation (5) peut s'écrire

$$(5') \quad \tilde{z} (y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_{p-2} y^{n-p+2}) + \tilde{z}_{p-1} y^{n-p+1} + \dots + \tilde{z}_n = 0,$$

et il est visiblement possible de déterminer des valeurs non toutes nulles de $C_0, C_1, \dots, C_{\pi'}$ telles que cette équation soit remplie pour $x = x_0, y = y_0, y_0$ étant la valeur pour $x = x_0$ de l'une des séries $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$, disons de \bar{y}_1 . Il est impossible que l'on ait $\tilde{z} = 0, \tilde{z}_\mu = 0 \quad (\mu = p-1, \dots, n)$ pour $x = x_0$, car ces équations ne donnent que $C_0 = 0, \dots, C_{\pi'} = 0$. On peut choisir $C_0, \dots, C_{\pi'}$ de manière que $\tilde{z} \neq 0$ pour $x = x_0$, sinon l'équation $\tilde{z} = 0$ serait une conséquence de l'équation $\tilde{z}_{p-1} y^{n-p+1} + \dots + \tilde{z}_n = 0$ pour $x = x_0, y = y_0$, et si ceci avait lieu quel que soit x_0 , on aurait

$$\xi_0 (\xi_{p-1 v} \bar{y}_1^{n-p+1} + \dots + \xi_{n v}) = \xi_v (\xi_{p-1 0} \bar{y}_1^{n-p+1} + \dots + \xi_{n 0})$$

$$(v = 1, \dots, \pi').$$

Les coefficients $\xi_v, \xi_{\mu v}$ sont de caractère rationnellé en dehors des points ξ et des points ajoutés. Comme $f(x)$ admet n déterminations permutable autour des points singuliers distincts de ces points, on devait donc avoir

$$\xi_0 \xi_{\mu v} = \xi_v \xi_{\mu 0},$$

par suite $\frac{\xi_{\mu}^{\nu}}{\xi}$ seraient indépendants de $C_0, C_1, \dots, C_{\pi'}$, ce qui est impossible. Si x_0 a été choisi convenablement, nous pouvons donc prendre des valeurs de $C_0, C_1, \dots, C_{\pi'}$ telles que l'équation (5') soit remplie pour $x = x_0, y = y_0$ et que l'on ait $\xi \neq 0$ pour ces mêmes valeurs. Alors, la solution de l'équation (5') qui pour $x = x_0$ devient égale à y_0 est nécessairement une intégrale de (1'), elle est donc \bar{y}_1 . Par suite

$$\xi (\bar{y}_1^n + \bar{z}_1 \bar{y}_1^{n-1} + \dots + \bar{z}_{p-2} \bar{y}_1^{n-p+1}) + \xi_{p-1} \bar{y}_1^{n-p+1} + \dots + \xi_n = 0;$$

de plus

$$\bar{y}_1^n + \bar{z}_1 \bar{y}_1^{n-1} + \dots + \bar{z}_n = 0,$$

done

$$(\xi_{p-1} - \xi \bar{z}_{p-1}) \bar{y}_1^{n-p+1} + \dots + \xi_n - \xi \bar{z}_n = 0,$$

d'où l'on conclut comme tout-à-l'heure que

$$\xi_{p-1} - \xi \bar{z}_{p-1}, \dots, \xi_n - \xi \bar{z}_n.$$

Les quotients $\frac{\xi_{p-1}}{\xi}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi}$ devaient donc être indépendants de constantes arbitraires si $C_0, C_1, \dots, C_{\pi'}$ satisfont à une certaine équation linéaire et homogène et à la condition d'inégalité: $\xi \neq 0$ pour $x = x_0$; ce qui est impossible si $\pi' > 1$. Il est donc démontré que $\pi' = 1$.

II. L'équation différentielle à laquelle se réduit le système (4) est une équation de RICCATI qui s'écrit

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = -(p-1) a_0 z^2 + bz - c.$$

Si l'on écrit, en résolvant les équations (3),

$$z_{\mu} = \alpha_{\mu} z_{p-1} + \beta_{\mu} \quad (\mu = p, \dots, n)$$

on aura le résultat suivant:

Si z est une solution quelconque de l'équation (6), toute solution de l'équation

$$(7) \quad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z y^{n-p+1} + \sum_{v=p}^n (\alpha_v z + \beta_v) y^{n-v} = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1').

L'équation écrite donne donc une transformation de l'équation (1') à l'équation de RICCATI (6). Il s'agit maintenant d'étudier les coefficients b, c, α_v, β_v ($v = p, \dots, n$). Ils sont des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{p-2}$ et de leurs dérivées, ils définissent donc des éléments de fonctions algébriques de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés. Il reste à démontrer que ces fonctions sont de caractère rationnelle aussi à ces points exceptés. A cet effet il suffit de montrer que $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{p-2}$ sont des éléments de fonctions uniformes.

Prolongeons les séries $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ le long d'un chemin fermé et supposons que l'on obtienne un nouvel système de séries $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$. En partant de ces dernières séries on obtiendra comme précédemment une équation de RICCATI

$$(6') \quad \frac{dz}{dx} = -(p-1)a_0 z^2 + \bar{b}z - \bar{c}$$

à laquelle se transforme l'équation (1') par une transformation de la forme

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z y^{n-p+1} + \sum_{v=p}^n (\bar{\alpha}_v z + \bar{\beta}_v) y^{n-v} = 0.$$

Nous savons que $z = \bar{z}_{p-1}$ satisfait à l'équation (6), par suite l'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$z = \bar{z}_{p-1} + \frac{1}{\alpha \bar{C} + \beta}.$$

De même l'intégrale générale de (6') s'écrit

$$\bar{z} = \bar{z}_{p-1} + \frac{1}{\alpha (\bar{C}' + \beta')}.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \bar{z}_v &= \alpha_v \bar{z}_{p-1} + \beta_v, \\ & \quad (v = p, \dots, n) \\ \bar{z}_v &= \alpha_v \bar{z}_{p-1} + \beta_v. \end{aligned}$$

Par suite, nous aurons les deux équations suivantes

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_n + \frac{1}{\alpha C + \beta} (y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \dots + \alpha_n) = 0,$$

$$y^n + \bar{\bar{z}}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{\bar{z}}_n + \frac{1}{\alpha C + \beta} (y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \dots + \bar{\alpha}_n) = 0,$$

dont toute solution satisfait à l'équation différentielle (1').

Posant dans ces équations $x = x_0, y = y_0$ on aura pour C, \bar{C} des fonctions rationnelles de y_0 : $C = C(y_0), \bar{C} = \bar{C}(y_0)$.¹ Si l'on introduit pour C, \bar{C} ces fonctions rationnelles, on aura deux équations qui sont satisfaites par l'intégrale de (1') correspondant à la valeur initiale y_0 pour $x = x_0$. D'après la supposition, $\bar{\bar{z}}_1, \dots, \bar{\bar{z}}_{p-2}$ ne sont pas identiques à $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{p-2}$ resp.; par suite, le nombre des solutions communes de ces équations est nécessairement plus petit que n . Soit n' le nombre des solutions communes pour une valeur arbitraire de y_0 . Le plus grand commun diviseur des premiers membres s'écrit

$$y^{n'} + r_1(y_0|x) y^{n'-1} + \dots + r_{n'}(y_0|x) = r(y, y_0|x),$$

$r_1, \dots, r_{n'}$ étant des fonctions rationnelles de y_0 et de $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, \bar{\bar{z}}_1, \dots, \bar{\bar{z}}_n, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \alpha_p, \bar{\alpha}_p$ ($p = 1, \dots, n$).

Il n'existe aucune valeur de y_0 pour laquelle $\frac{1}{\alpha C(y_0) + \beta}$ ou $\frac{1}{\alpha \bar{C}(y_0) + \bar{\beta}}$ soit égal à l'infini identiquement (pour toute valeur de x). Par suite, il n'existe non plus une valeur de y_0 pour laquelle l'une des expressions $r_1, \dots, r_{n'}$ soit égale à l'infini identiquement. On en conclut que, pour toute valeur de y_0 , la fonction $r(y, y_0|x)$ est diviseur de la fonction

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_n + \frac{1}{\alpha C(y_0) + \beta} (y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \dots + \alpha_n).$$

En particulier, si $C(\bar{y}_0) = \infty$ $r(y, \bar{y}_0|x)$ est diviseur de $y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_n$.

Or, les expressions $r_1(\bar{y}_0|x), \dots, r_{n'}(\bar{y}_0|x)$ définissent des éléments de fonctions qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés, si l'on suppose que les points singuliers de l'équation de RICCATI (6) appartiennent

¹ Pour la démonstration suivante cf. PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 44, 45.

aux points ajoutés, ce qui est évidemment permis. Par suite, $f(x)$ admet au plus n' déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés. Or, ceci est contraire à la définition de n . Par suite, la supposition faite doit être rejetée.

Donc, $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{p-2}$ sont des éléments de fonctions uniformes. Par là, le théorème 2' est démontré.

Faisons une remarque au sujet du nombre n . Il pourrait arriver que l'équation de RICCATI (6) ait des points singuliers en dehors des points ξ . Soit a un tel point, et démontrons qu'il n'existe qu'une seule intégrale de (6) qui soit singulière pour $x=a$. Si a est point singulier pour toute intégrale de (6), l'équation (7) a, quelle que soit l'intégrale z de (6), une solution, singulière pour $x=a$. Cette solution, qui est intégrale de (1') est nécessairement une série

de la forme $(x-a)^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P} \left((x-a)^{\frac{1}{p-1}} \right)$ parfaitement déterminée par le point a . On en conclut que les fonctions

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_{p-2} y^{n-p+2} + \alpha_p y^{n-p} + \dots + \alpha_n,$$

$$\beta_p y^{n-p} + \dots + \beta_n$$

ont un diviseur commun; par suite, toute intégrale de (1') et en particulier $f(x)$ admet moins de n déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, ce qui est contre l'hypothèse. Le point a ne saurait donc être point singulier pour toute intégrale de (6). En posant $z = \frac{1}{(p-1)a_0} u^{n'}$ on aura pour u une équation linéaire et homogène du second ordre, et comme a n'est pas un zéro de a_0 (les zéros de a_0 appartiennent aux points ξ) il résulte que cette équation linéaire a toutes ses intégrales régulières pour $x=a$; de plus, il n'existe qu'une seule intégrale qui a le point a comme zéro. Par suite, il n'existe qu'une seule intégrale de (6) qui est singulière pour $x=a$, et cette intégrale a en a un pôle. De là, on conclut que toute intégrale de (1') admet au plus n déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ . En particulier, $f(x)$ admet n déterminations permutable de cette manière. Les nombre n, n' définis à la page 312 sont donc identiques.

12. Nous étudions maintenant l'équation générale (1), et nous supposons alors que $p = q + 2$. Soit $f(x)$ une intégrale transcendante à un nombre fini m de déterminations, prenons un point x_0 distinct des points ξ et des points singu-

liers de $f(x)$, et soient y_1, \dots, y_m les séries de puissance de $x - x_0$ qui appartiennent à $f(x)$. Elles se partagent en groupes

$$\begin{aligned} & y_1, \dots, y_n \\ & y_{n+1}, \dots, y_{2n} \\ & \dots \dots \dots \\ & y_{m-n+1}, \dots, y_m \end{aligned}$$

à un même nombre n de séries de telle manière que les séries d'un même groupe se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et de certains points ajoutés en nombre fini, tandis que deux séries qui appartiennent à des groupes différents ne se permutent pas de cette manière. Les expressions symétriques $f_v(y_1, \dots, y_n), f_v(y_{n+1}, \dots, y_{2n}), \dots, f_v(y_{m-n+1}, \dots, y_m)$ définissent des éléments d'une fonction $f_v(x)$ qui est de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés.

Pour étudier les fonctions $f_1(x), \dots, f_n(x)$ nous étudions d'abord certaines combinaisons de ces fonctions. Nous supposons que x_0 soit distinct des points singuliers des fonctions algébriques définies par l'équation en y $Q(x, y) = 0$, nous désignons par β_1, \dots, β_q les séries de puissance de $x - x_0$ qui satisfont à cette équation, certaines de ces séries pouvant être identiques, et nous considérons les expressions symétriques

$$f_v \left(\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i} \right) \quad \left(\begin{matrix} v = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right),$$

r_i désignant l'ordre de multiplicité de la racine β_i de l'équation $Q(x, y) = 0$ pour une valeur arbitraire de x . On voit facilement que ces expressions définissent des éléments de fonctions qui n'admettent *aucun point singulier* en dehors des points ξ , des points ajoutés et des points singuliers non polaires des fonctions algébriques dont β_1, \dots, β_q sont des éléments. En effet, supposons qu'un point \bar{x} distinct de ces points soit singulier pour la branche que l'on obtient en prolongeant la série définie par l'expression $f_v \left(\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i} \right)$ le long d'un chemin de \bar{x}_0 à \bar{x} . En prolongeant les séries définies par les expressions $\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i}$ le long du même chemin on obtiendra n branches dont certaines doivent être infinies pour $x = \bar{x}$. Ces branches sont données, dans le voisinage de \bar{x} , par les déterminations d'une série de la forme

$$(x - \bar{x})^{-\frac{1}{r_i+1}} \mathfrak{P}_1 \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \right).$$

Les autres branches sont régulières pour $x = \bar{x}$. Par suite, la branche définie par prolongement analytique de $f_v \left(\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i} \right)$ s'obtient dans le voisinage de \bar{x} par une série de la forme

$$(x - \bar{x})^{-\frac{r}{r_i+1}} \mathfrak{P}_1 \left((x - \bar{x})^{\frac{1}{r_i+1}} \right),$$

où les puissances fractionnaires disparaissent. Si $r \leq r_i$ les puissances négatives disparaissent, le point x ne saurait donc être point singulier.

En s'appuyant sur ce résultat et sur les théorèmes B, C on démontre comme au n° 6 la proposition suivante.

Les fonctions dont les expressions

$$f_v \left(\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i} \right) \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right)$$

définissent des éléments sont des fonctions algébriques.

Désignons par \bar{z}_v , \bar{z}_{vi} les séries de puissance définies par les expressions $f_v(y_1, \dots, y_n)$, $f_v \left(\frac{1}{y_1 - \beta_i}, \dots, \frac{1}{y_n - \beta_i} \right)$ resp. et posons

$$\bar{\varphi}(y) = y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_n.$$

On aura

$$f_v \left(\frac{1}{y_1 - y}, \dots, \frac{1}{y_n - y} \right) = \frac{1}{r} \frac{\bar{\varphi}^{(r)}(y)}{\bar{\varphi}(y)},$$

par suite

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\varphi}^{(r)}(\beta_i)}{\bar{\varphi}(\beta_i)} = \bar{z}_{vi} \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Ces équations peuvent s'écrire comme des relations linéaires entre $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ avec coefficients qui sont des éléments de fonctions algébriques.

¹ Il pourrait exister un nombre fini de points \bar{x} tels que la valeur obtenue pour $x = \bar{x}$ en prolongeant β_i le long du chemin considéré soit racine de l'équation $Q(\bar{x}, y) = 0$ d'un ordre de multiplicité plus grand que r_i ; pour un tel point, on doit remplacer r_i par un nombre plus grand, mais on voit facilement que cela ne fait aucune difficulté pour les raisonnements suivants.

Nous déduisons maintenant un système d'équations différentielles pour $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Nous considérons n séries de puissance y_1, \dots, y_n d'une même différence $x - x_0$ qui satisfont à l'équation (1) et nous désignons les expressions symétriques de ces séries par z_1, \dots, z_n . En dérivant l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n = 0,$$

où y désigne l'une quelconque des séries y_1, \dots, y_n on aura

$$(8) \quad \begin{aligned} (ny^{n-1} + (n-1)z_1 y^{n-2} + \dots + z_{n-1})(a_0 y^p + \dots + a_p) + \\ + \left(\frac{dz_1}{dx} y^{n-1} + \dots + \frac{dz_n}{dx} \right) (b_0 y^q + \dots + b_q) = 0. \end{aligned}$$

Ajoutons à cette équation l'équation suivante

$$(9) \quad (y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n)(B_1 y^{p-1} + \dots + B_p) = 0,$$

B_1, \dots, B_p étant déterminés de manière que l'on obtienne une équation de degré $n-1$. Soit

$$\sum_{r=1}^n (z_r B_p + \dots + z_{r+p-1} B_1 + A_r) y^{n-r} = 0$$

cette équation, où

$$\begin{aligned} A_r = (n-r+1)a_p z_{r-1} + (n-r)a_{p-1} z_r + \dots + (n-r-p+1)a_0 z_{r+p-1} + \\ + b_q \frac{dz_r}{dx} + \dots + b_0 \frac{dz_{r+q}}{dx} \end{aligned}$$

($r = 1, \dots, n$)

et $z_r = 0$ si $r > n$. Cette équation doit être une identité. On obtiendra donc

$$(10) \quad \begin{aligned} b_q \frac{dz_r}{dx} + \dots + b_0 \frac{dz_{r+q}}{dx} = -(n-r+1)a_p z_{r-1} - \\ - z_r (B_p + (n-r)a_{p-1}) - \dots - z_{r+p-1} (B_1 + (n-r-p+1)a_0), \end{aligned}$$

($r = 1, \dots, n$)

et ces équations ont lieu même si certaines des séries y_1, \dots, y_n sont identiques.

En déterminant les quantités B_1, \dots, B_p de proche en proche, on aura pour B_1, B_2

$$B_1 = -na_0,$$

$$B_2 = -na_1 + a_0 z_1;$$

mais pour B_3, \dots, B_p on aura des expressions qui dépendent linéairement des dérivées $\frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{dz_n}{dx}$. Afin de résoudre les équations (10) par rapport à ces dérivées nous déduisons d'abord, en nous appuyants sur les dites équations, des expressions de B_3, \dots, B_p qui ne dépendent pas des dérivées. A cause des équations (10), la somme des premiers membres des équations (8), (9) est identiquement nulle. En posant $y = \beta_i$ on aura donc

$$\begin{aligned} (B_1 \beta_i^{p-1} + \dots + B_p) (\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \dots + z_n) + \\ + (n \beta_i^{n-1} + (n-1) z_1 \beta_i^{n-2} + \dots + z_{n-1}) (a_0 \beta_i^p + \dots + a_p) = 0 \\ (i = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

ou

$$B_1 \beta_i^{p-1} + \dots + B_p = -P(\beta_i) \frac{q'(\beta_i)}{q(\beta_i)} \quad (i = 1, \dots, q)$$

si l'on pose

$$P(y) = a_0 y^p + \dots + a_p, \quad q(y) = y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n.$$

Nous supposons d'abord que les racines β_1, \dots, β_q soient distinctes. En résolvant les dernières équations par rapport à B_3, \dots, B_p on aura donc

$$\begin{aligned} \left| \beta_i^{q-1}, \dots, \beta_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q} B_{\nu+2} = \\ = - \left| \beta_i^{q-1}, \dots, \beta_i^{q-\nu+1}, B_1 \beta_i^{q+1} + B_2 \beta_i^q + P(\beta_i) \frac{q'(\beta_i)}{q(\beta_i)}, \beta_i^{q-\nu-1}, \dots, \beta_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q} \\ (\nu = 1, \dots, q). \end{aligned}$$

Introduisons les expressions de B_1, B_2 écrites plus haut. Si l'on pose

$$R_\nu = \frac{\left| \beta_i^{q-1}, \dots, \beta_i^{q-\nu+1}, P(\beta_i) \frac{q'(\beta_i)}{q(\beta_i)}, \beta_i^{q-\nu-1}, \dots, \beta_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q}}{\left| \beta_i^{q-1}, \dots, \beta_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q}} \quad (\nu = 1, \dots, q),$$

on aura donc, en s'appuyant sur les valeurs connues des déterminants $\left| \beta_i^{r_1}, \dots, \beta_i^{r_q} \right|_{i=1, \dots, q} :^1$

¹ Voir p. ex. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, p. 95, ou PASCAL, *Die Determinanten*, p. 128.

$$B_{r+2} = \frac{b_r}{b_0} a_0 z_1 - n a_1 \frac{b_r}{b_0} + \frac{n a_0}{b_0^2} \left| \frac{b_r}{b_{r+1}} \frac{b_0}{b_1} \right| - R_r \quad (r = 1, \dots, q).$$

En introduisant les expressions trouvées pour B_1, \dots, B dans les équations (10) et en résolvant les équations ainsi obtenues par rapport à $\frac{dz_r}{dx} + \frac{a_0}{b_0} z_1 z_r$ ($r = 1, \dots, n$) on obtiendra le système suivant d'équations différentielles

$$(II) \quad \frac{dz_r}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_1 z_r + \sum_{\mu=1}^n \left\{ \sum_{\lambda=1}^q \alpha_{\lambda\mu}^{(r)} R_\lambda + \alpha_\mu^{(r)} \right\} z_\mu + \alpha^{(r)} \quad (r = 1, \dots, n),$$

$\alpha_{\lambda\mu}^{(r)}, \alpha_\mu^{(r)}, \alpha^{(r)}$ étant des fonctions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$.

Si les racines β_1, \dots, β_q ne sont pas distinctes, les expressions R_λ deviennent indéterminées. Mais on peut écrire R_λ sous la forme d'un quotient entre deux fonctions entières et rationnelles de $z_1, \dots, z_n, b_0, b_1, \dots, b_q$

$$R_\lambda = \frac{G_\lambda}{G} \quad (\lambda = 1, \dots, q),$$

G étant le résultant des deux fonctions de y

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n, \quad b_0 y^q + \dots + b_q.$$

La fonction G ne peut jamais être identiquement nulle, car une racine β_i ne peut pas satisfaire à l'équation différentielle. Si l'on écrit R_λ sous cette forme, elle ne devient donc pas indéterminée quand les racines β_1, \dots, β_q ne sont pas distinctes.

Nous avons déduit le système (II) sous la condition que les racines β_1, \dots, β_q soient distinctes. Mais comme le système (II) est obtenu par la résolution des équations (10) par rapport aux dérivées et comme $R_\lambda = \frac{G_\lambda}{G}$ ($\lambda = 1, \dots, q$) restent finies et déterminées dans le cas où β_1, \dots, β_q ne sont pas distincts, il est évident que le système (II) subsiste même dans ce dernier cas.

Dans le cas où les racines β_1, \dots, β_q ne sont pas distinctes nous écrivons

$b_q^n \alpha_{\lambda\mu}^{(r)}, b_q^n b_0^2 \alpha_\mu^{(r)}$ sont des fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$; $\alpha_{\lambda\mu}^{(r)}$ sont indépendantes de a_0, a_1, \dots, a_p ; $\alpha^{(1)}$ est égale à $-n \frac{a_p}{b_q}$ et $\alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ sont nulles.

R_λ sous une forme qui rappelle la forme primitive de R_λ valable si β_1, \dots, β_q sont distinctes. Partons de l'expression

$$\frac{\left| \gamma_i^{q-1}, \dots, \gamma_i^{q-r+1}, P(\gamma_i) \frac{\varphi'(\gamma_i)}{\varphi(\gamma_i)}, \gamma_i^{q-r-1}, \dots, \gamma_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q}}{\left| \gamma_i^{q-1}, \dots, \gamma_i, 1 \right|_{i=1, \dots, q}},$$

où $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ sont des indéterminés, et faisons tendre $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ vers les racines β_1, \dots, β_q . Si β_i est racine d'ordre r_i , on voit que R_λ peut s'écrire comme une fonction linéaire de

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial \beta_i^{r-1}} \left[P(\beta_i) \frac{\varphi'(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \right] \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right)$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de β_1, \dots, β_q . Par suite, R_λ s'écrit comme une fonction linéaire de

$$\frac{\varphi^{(r)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Introduisant dans R_λ $z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_n = \bar{z}_n$ on obtiendra une expression R_λ qui s'écrit comme une fonction linéaire des expressions

$$\frac{\bar{\varphi}^{(r)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Nous avons démontrés que ces dernières expressions définissent des éléments de fonctions algébriques. Par suite, il en est de même des expressions R_1, \dots, R_q .

Considérons maintenant les équations différentielles suivantes

$$(12) \quad \frac{dz_\nu}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_\nu + \sum_{\mu=1}^n \left\{ \sum_{\lambda=1}^q \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} \bar{R}_\lambda + \alpha_{\mu}^{(\nu)} \right\} z_\mu + \alpha^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

qui ont la même forme que les équations considérées au n:o 9. Elles sont remplies pour $z_1 = \bar{z}_1, \dots, z_n = \bar{z}_n$. En partant des relations linéaires

$$\frac{1}{r} \bar{\varphi}^{(r)}(\beta_i) = \bar{z}_{ri} \bar{\varphi}(\beta_i) \quad \left(\begin{matrix} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{matrix} \right)$$

et en faisant des dérivations successives on obtiendra comme au n:o cité une suite de relations linéaires entre z_1, \dots, \bar{z}_n dont les coefficients sont des éléments

de fonctions algébriques. Comme on a supposé que la fonction $f(x)$ est transcendante, il est impossible que toutes les fonctions $f_1(x), \dots, f_n(x)$ soient algébriques. Par suite, on obtiendra au plus $n - 1$ relations linéaires distinctes. Désignons par π le nombre des relations distinctes et soient

$$\beta_1^{(\lambda)} \bar{z}_1 + \dots + \beta_n^{(\lambda)} \bar{z}_n = \beta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \dots, \pi)$$

ces relations.

Considérons les équations

$$(13) \quad \beta_1^{(\lambda)} z_1 + \dots + \beta_n^{(\lambda)} z_n = \beta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \dots, \pi)$$

et distinguons deux cas. Si elles peuvent être résolues par rapport à des variables $z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_\pi}$ parmi lesquelles ne figure pas z_1 , on obtiendra, en mettant les expressions trouvées pour $z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_\pi}$ dans celles des équations (12) qui correspondent aux valeurs $\mu'_1, \dots, \mu'_{\pi'}$ de ν distinctes de μ_1, \dots, μ_π , un système d'équations différentielles de la forme

$$(14) \quad \frac{dz_{\mu'_{\nu}}}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_{\mu'_1} z_{\mu'_2} + \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_{\lambda \nu} z_{\mu'_\lambda} + c_\nu \quad (\nu = 1, \dots, \pi'),$$

où nous avons posé $z_1 = z_{\mu'_1}$. Si z_1 figure nécessairement dans tout système de variables par rapport auxquelles les équations (13) peuvent être résolues, on aura pour z_1 une expression qui ne dépend d'aucune des autres variables. Cette expression est donc égale à \bar{z}_1 (car $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ satisfont aux équations (13)) et définit, comme les coefficients des équations (13), un élément d'une fonction algébrique. Par suite, $f_1(x)$ devait être une fonction algébrique. Or, ceci est impossible, car tout pôle de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés est nécessairement un pôle de $f_1(x)$, et la fonction $f(x)$ a une infinité de pôles, comme on le voit en remarquant que si $f(x)$ n'avait qu'un nombre fini de pôles, cette fonction n'aurait, en vertu des inégalités de M. BOUTROUX, d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques, et serait par conséquent une fonction algébrique. On voit donc que le cas considéré maintenant ne peut pas entrer.

De la même manière qu'au n:o 9 on obtiendra maintenant le résultat suivant :

Soit $z_{\mu'_1}, \dots, z_{\mu'_{\pi'}}$ une solution du système (14), déterminons $z_{\mu_1}, \dots, z_{\mu_\pi}$ par les équations (13) et supposons que $\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \dots + z_n \neq 0$ ($i = 1, \dots, q$). Alors, toute solution de l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \dots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1).

En voyant la démonstration du n:o 9 on peut facilement construire la démonstration si l'on remarque que les équations $\frac{1}{[r]} q^{(r)}(\beta_i) = \bar{z}_{ri} q(\beta_i)$ ($r = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, q$) se trouvent parmi les équations (13) et que R_i, \bar{R}_i sont les mêmes expressions linéaires de $\frac{1}{[r]} q^{(r)}(\beta_i)$ ($r = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, q$) et de \bar{z}_{ri} ($r = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, q$) resp., d'où l'on conclut que les égalités $R_i = \bar{R}_i$ ($i = 1, \dots, q$) sont une conséquence des équations (13) si $\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \dots + z_n \neq 0$ ($i = 1, \dots, q$).

En raisonnant comme au n:o 10 on démontre ensuite que le système (14) se réduit à une seule équation, qui est une équation de RICCATI

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_0}{b_0} z^2 + bz + c.$$

Ayant donc $r' = 1$ on peut résoudre les équations (13) par rapport à z_2, \dots, z_n :

$$z_\mu = a_\mu z_1 + a'_\mu \quad (\mu = 2, \dots, n),$$

et le résultat énoncé tout-à-l'heure peut être énoncé maintenant de la manière suivante:

Soit z une solution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_0}{b_0} z^2 + bz + c$$

telle que

$$\beta_i^n + z \beta_i^{n-1} + (\alpha_2 z + \alpha'_2) \beta_i^{n-2} + \dots + \alpha_n z + \alpha'_n \neq 0 \quad (i = 1, \dots, q).$$

Alors, toute solution de l'équation

$$y^n + z y^{n-1} + (\alpha_2 z + \alpha'_2) y^{n-2} + \dots + \alpha_n z + \alpha'_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1).

Les coefficients b, c, a_r, a'_r ($r = 2, \dots, n$), qui sont des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q, R_1, \dots, R_q$ et de leurs dérivées, définissent des éléments de fonctions algébriques de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés, ($\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_q$ sont symétriques en β_1, \dots, β_q). Par

les raisonnements du n:o 11 on démontre que ces fonctions sont rationnelles. Nous aurons donc le théorème suivant.

Théorème 2. *Si l'équation (1) ne se transforme pas à une équation de Riccati*

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c$$

par une transformation de la forme

$$z = \frac{y^n + \alpha'_2 y^{n-2} + \dots + \alpha'_n}{y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} + \dots + \alpha_n}.$$

les coefficients $a, b, c, \alpha_v, \alpha'_v$ ($v = 2, \dots, n$) étant des fonctions rationnelles de x , toute intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une fonction algébrique.

De la même manière qu'au n:o précédent on démontre que $f(x)$ admet n déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ .

13. Considérons maintenant une équation différentielle (1) qui se transforme à une équation de RICCATI de la manière indiquée et qui a une intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations, et voyons quels sont les cas différents qui peuvent se présenter. Nous distinguons d'abord deux cas:

- 1) il existe des intégrales à une infinité de déterminations,
- 2) toute intégrale a un nombre fini de déterminations.

Etudions d'abord le premier cas, et considérons l'équation de RICCATI, à laquelle se transforme l'équation (1). Si z_1, z_2, z_3, z sont des séries de puissance de $x - x_0$ qui satisfont à cette équation, on a

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = C.$$

Si z_1, z_2, z_3 étaient des éléments de fonctions à un nombre fini de déterminations on voit donc que toute intégrale de (1) aurait un nombre fini de déterminations. On voit donc que l'un des deux cas suivant doit avoir lieu: ou bien il existe deux intégrales uniformes de l'équation de RICCATI, ou bien il existe une seule intégrale à un nombre fini de déterminations, cette intégrale étant ou bien une fonction uniforme ou bien une fonction à deux déterminations. S'il existe deux intégrales uniformes qui sont toutes deux transcendentes, on voit que l'équation (1) a deux intégrales transcendentes à un même nombre de déterminations, toutes les déterminations se permutant autour des points singuliers distincts des points ξ . En effet, si n désigne le nombre des déterminations de l'une des intégrales et si l'on suppose que toutes ces déterminations ne se permutaient pas autour des points singuliers distincts des points ξ , l'équation de Ric-

RICCATI aurait au moins trois éléments d'intégrales appartenant à des fonctions à un nombre fini de déterminations; par suite toute intégrale de (1) aurait un nombre fini de déterminations, ce qui est contre l'hypothèse. D'autre part, si le nombre des déterminations de l'autre intégrale était $< n$, l'intégrale considérée tout-à-l'heure admettrait un nombre de déterminations $< n$ permutable autour des points singuliers distincts des points ξ . Supposons ensuite que l'équation de RICCATI ait une intégrale uniforme transcendante et une intégrale rationnelle. Alors, l'équation (1) a une seule intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations et un certain nombre d'intégrales algébriques qui est au plus égal au nombre des déterminations de l'intégrale transcendante (la somme des nombres de déterminations des intégrales algébriques est au plus égale à ce nombre). Supposons enfin que l'équation de RICCATI ait une seule intégrale à un nombre fini de déterminations. Alors, il en est de même de l'équation (1).

Considérons maintenant le cas où toute intégrale de (1) ait un nombre fini de déterminations. Alors, on voit d'abord qu'il existe une limite supérieure pour le nombre des déterminations des intégrales de l'équation de RICCATI, par suite, la même chose a lieu pour l'équation (1).¹ Voyons ensuite comment varie d'une intégrale à l'autre le nombre des déterminations des intégrales. On voit d'abord que toutes les intégrales transcendantes admettent le même nombre de déterminations permutable autour des points singuliers distincts des points ξ , car si n désigne ce nombre pour l'une des intégrales transcendantes, il résulte de la démonstration du théorème 2, que ce nombre est au plus égal à n pour toute autre intégrale transcendante. Pour une intégrale algébrique ce nombre pourrait être plus petit que n . Quant à l'existence d'intégrales algébriques, on voit que pour l'équation de RICCATI les trois cas suivants sont les seuls possibles: 1) il existe deux intégrales rationnelles, 2) il existe une seule intégrale algébrique qui est ou bien rationnelle ou bien une fonction à deux déterminations, 3) il n'existe aucune intégrale algébrique. Dans le cas où il existe une intégrale algébrique, la somme des nombres de déterminations des intégrales algébriques de (1) est au plus égale à $2n$. Pour étudier comment varie d'une intégrale à l'autre le nombre total des déterminations des intégrales il suffit de faire une telle étude pour l'équation de RICCATI. Désignons par m' le nombre maximum de déterminations d'une intégrale de cette équation. Il existe au plus $2m' - 2$ intégrales pour lesquelles le nombre de déterminations est plus petit que m' , car l'intégrale générale s'écrit $\frac{\alpha C + \beta}{C + \gamma}$, et une équation de la forme

¹ On aura donc la solution du problème posé par M. PAINLEVÉ dans la *Note* citée, p. 178, note.

$$\frac{\alpha C + \beta}{C + \gamma} = \frac{\alpha_1 C + \beta_1}{C + \gamma_1}.$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont des fonctions de x , ne peut être satisfaite que pour deux valeurs au plus de C .

M. PAINLEVÉ appelle intégrale exceptionnelle d'espèce i_m une intégrale de (1) pour laquelle le nombre des déterminations permutablement autour des points singuliers distincts des points ξ est plus petit que n , et intégrale exceptionnelle d'espèce i_f une intégrale dont le nombre total de déterminations est plus petit que $m = m'n$; ¹ pour les intégrales d'espèce i_f nous ajoutons cette condition qu'elles ne soient en même temps des intégrales exceptionnelles d'espèce i_m . Avec cette terminologie nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Toute intégrale exceptionnelle d'espèce i_m est une fonction algébrique. La somme des nombres de déterminations de ces intégrales est au plus égale à $2n$. Il existe au plus $2m' - 2$ intégrales exceptionnelles d'espèce i_f .

14. Nous allons généraliser maintenant les résultats du présent mémoire à être valables pour une branche d'intégrale. Appellons *branche algébroïde* ou *branche de caractère algébrique* une branche à un nombre fini de déterminations qui n'a, à l'intérieur du domaine où elle est définie, d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques; au contraire, nous admettons l'existence de points singuliers non algébriques sur la limite du domaine. Nous démontrons alors le théorème suivant :

Théorème 3. *Si l'équation (1) ne se transforme pas à une équation de Riccati de la manière indiquée au théorème 2, toute branche d'intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une branche algébroïde.*

Supposons qu'il existe une branche d'intégrale $f(x)$ qui a un nombre fini de déterminations et qui n'est pas une branche algébroïde, et soit X le domaine où cette branche est définie. Les déterminations de $f(x)$ se répartissent en groupes à un même nombre n de déterminations de telle manière que les déterminations d'un même groupe se permutent autour des points singuliers de $f(x)$ distincts des points ξ et de certains points ajoutés en nombre fini, tandis que deux déterminations qui appartiennent à des groupes différents ne se permutent pas de cette manière. Soient $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ les déterminations d'un certain groupe (séries de puissance d'une même différence $x - x_0$), désignons les expressions symétriques de $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ par $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ et considérons les expressions

¹ Voir la Note de M. PAINLEVÉ, p. 170.

$$\frac{1}{r} \frac{\varphi^{(r)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \quad \left(\begin{array}{l} r = 1, \dots, r_i \\ i = 1, \dots, q \end{array} \right)$$

où $\varphi(y) = y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \dots + \bar{z}_n$. Ces expressions s'écrivent comme des séries de puissance \bar{z}_{vi} ; en partant de ces séries et en faisant des prolongements analytiques de toutes les manières possibles à l'intérieur de X on obtiendra certaines branches \bar{z}_{vi}^X . On démontre que ces branches sont des branches algébroides.

Répétons les raisonnements du n° 13 en astreignons la variable x au domaine X . On aboutira alors au résultat suivant:

Il existe une équation de RICCATI

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_n z^2 + b_n^X z + c_n^X}{b_n}$$

et une équation algébrique de degré n

$$y^n + z y^{n-1} + (\alpha_2^X z + \bar{\alpha}_2^X) y^{n-2} + \dots + \alpha_n^X z + \bar{\alpha}_n^X = 0$$

qui ont la propriété suivante: si z est une solution de l'équation de RICCATI telle que

$$\beta_i^n + z \beta_i^{n-1} + (\alpha_2^X z + \bar{\alpha}_2^X) \beta_i^{n-2} + \dots + \alpha_n^X z + \bar{\alpha}_n^X \neq 0 \quad (i = 1, \dots, q),$$

toute solution de l'équation algébrique satisfait à l'équation différentielle (1). Les coefficients $b_n^X, c_n^X, \alpha_r^X, \bar{\alpha}_r^X$ ($r = 2, \dots, n$) sont des branches uniformes à caractère rationnelle.

Démontrons que ces coefficients sont des branches de fonctions rationnelles. On a $\bar{z}_\mu = \alpha_\mu^X z_1 + \bar{\alpha}_\mu^X$ ($\mu = 2, \dots, n$), donc

$$\frac{\varphi^{(r)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} = \frac{\psi^{(r)}(\beta_i) \bar{z}_1 + \chi^{(r)}(\beta_i)}{\psi(\beta_i) \bar{z}_1 + \chi(\beta_i)},$$

où

$$\begin{aligned} \psi(y) &= y^{n-1} + \alpha_2^X y^{n-2} + \dots + \alpha_n^X \\ \chi(y) &= y^n + \bar{\alpha}_2^X y^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_n^X. \end{aligned}$$

En partant de z_1 et en faisant des prolongements analytiques à l'intérieur de X on obtiendra une certaine branche qui a un nombre fini de déterminations et qui a nécessairement un point singulier essentiel à l'intérieur de X (cf. page 337). $\alpha_\mu^X, \bar{\alpha}_\mu^X$ ($\mu = 2, \dots, n$) peuvent s'écrire comme des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q, \beta_1, \dots, \beta_q, \bar{z}_{vi}^X$ ($r = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, q$). Comme \bar{z}_{vi}^X sont

des branches algébroides on conclut donc que l'on aura de même des branches algébroides en partant de $\psi(\beta_i)$, $\chi(\beta_i)$, $\psi^{(\mu)}(\beta_i)$, $\chi^{(\mu)}(\beta_i)$ et en faisant des prolongements à l'intérieur de X . Par suite, l'expression linéaire de z_1 écrite plus haut est nécessairement indépendante de \bar{z}_1 , et on aura donc

$$\bar{z}_{\mu i} = \frac{\varphi^{(\mu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} = \frac{\psi^{(\mu)}(\beta_i)}{\psi(\beta_i)} = \frac{\chi^{(\mu)}(\beta_i)}{\chi(\beta_i)} \quad \left(\begin{array}{l} \mu = 1, \dots, n_i \\ i = 1, \dots, q \end{array} \right).$$

Or, en raisonnant comme à la fin du n:o 11 (page 330) on démontre que $b^X, c^X, \alpha_\mu^X, \bar{\alpha}_\mu^X (\mu = 2, \dots, n)$ sont des branches de fonctions qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ , et par les raisonnements précédents du n:o cité on démontre que ces fonctions sont uniformes. Par suite, $\bar{z}_{\nu i}$ sont des éléments de fonctions à un nombre fini de déterminations (au plus égal à q) qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points singuliers des fonctions algébriques définies par l'équation $Q(x, y) = 0$. Comme au n:o 12 (page 331) on démontre que ces fonctions n'ont aucun point singulier en dehors des dits points, et par les théorèmes de M. BOUTROUX on démontre ensuite qu'elles sont des fonctions algébriques. Comme $b^X, c^X, \alpha_\mu^X, \bar{\alpha}_\mu^X (\mu = 2, \dots, n)$ peuvent s'écrire comme des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q, \beta_1, \dots, \beta_q, \bar{z}_{\nu i}$, elles sont donc aussi des branches de fonctions algébriques. Comme ces fonctions sont uniformes elles sont rationnelles. Par là, le théorème 3 est démontré.

Le cas le plus intéressant est celui où X contient un seul point ξ . On obtiendra alors un résultat sur la manière dont certaines intégrales se comportent au voisinage du point singulier ξ .

Considérons aussi le cas où l'équation (1) se transforme à une équation de RICCATI et il existe une branche d'intégrale à un nombre fini de déterminations qui n'est pas une branche algébroïde. On démontre comme au n:o précédent que le nombre des déterminations d'une telle branche qui se permutent autour des points singuliers de la branche distinct des points ξ est un invariant, il ne varie pas d'une branche à une autre de la nature considérée, même si les branches sont définies dans des domaines différents. Considérons par exemple le cas où il existe une intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations et entourons chaque point singulier essentiel de cette intégrale par un cercle arbitrairement petit: on obtiendra toujours le même nombre de déterminations si l'on tourne autour des points singuliers distincts des points ξ et situés dans un quelconque de ces cercles, et si l'on tourne autour de tous les points singuliers distincts des points ξ .

ZUR THEORIE DER LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG VOM ELLIPTISCHEN TY- PUS. DIE ERSTE RANDWERTAUFGABE FÜR ANALYTISCHE GEBIETE MIT ECKEN.

VON

LEON LICHTENSTEIN

in BERLIN.

Es sei T_0 ein von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurven, die einander weder schneiden noch berühren, begrenztes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene der Variablen X und Y . Die Gesamtheit der Begrenzungskurven von T_0 sei mit S_0 bezeichnet. Es mögen A , B , C , F stetige Funktionen von X und Y bezeichnen; A und B haben in T_0 und auf S_0 stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, C und F erfüllen in jedem ganz im Innern von T_0 gelegenen Gebiete die HÖLDER'sche Bedingung

$$(1) \quad \begin{aligned} |C(X+h, Y+h') - C(X, Y)| &< \beta [|h| + |h'|]^\lambda, \\ |F(X+h, Y+h') - F(X, Y)| &< \beta [|h| + |h'|]^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet β eine gewisse positive Grösse. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + C U = F.$$

Die Bestimmung derjenigen Lösung der Differentialgleichung (2), die in T_0 und auf S_0 stetig ist, auf S_0 verschwindet und deren partielle Ableitungen erster

und zweiter Ordnung im Innern von T_0 sich stetig verhalten, ist von den Herren HILBERT und PICARD auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt worden.¹ Haben die vorgeschriebenen Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung, so führt die Substitution

$$(3) \quad U(X, Y) = U_1(X, Y) + v_0(X, Y),$$

worin v_0 die in T_0 reguläre Potentialfunktion mit gleichen Randwerten bezeichnet, das Problem auf das vorerwähnte zurück.

Sind die vorgeschriebenen Randwerte schlechthin stetig, oder, noch allgemeiner, beschränkt und integrierbar, so führt, da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v_0}{\partial X}, \frac{\partial v_0}{\partial Y}$ am Rande im allgemeinen nicht existieren, die Substitution (3) nicht mehr zum Ziele.

In einer in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Arbeit, sowie in einer Note in den Comptes rendus habe ich den Existenzbeweis der Lösung für abteilungsweise stetige Randwerte geführt.² In einer weiteren kurz darauf erschienenen Note³ habe ich den besonderen Fall eines Gebietes behandelt, welches durch Vermittlung einer analytischen Funktion von der Form

$$(4) \quad z - z_0 = (Z - Z_0)^r \mathfrak{P}[(Z - Z_0)^r], \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0, \quad r > 0$$

auf den Einheitskreis konform abgebildet werden kann. Diese Untersuchung soll in der vorliegenden Arbeit auf allgemeinere Gebiete mit Ecken ausgedehnt werden.

Das Randwertproblem wird durch geeignete Modifikation der von den Herren HILBERT und PICARD zuerst eingeführten Methode der teilweisen Integration auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung mit unstetigem Kerne zurückgeführt. Es ist in unserem Falle der Gebiete mit Ecken nicht möglich, durch

¹ Vergl. HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Gött. Nachr., 1904, S. 248 u. ff., PICARD, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, S. 250–254, und Annales de l'Ecole Normale, 1906, S. 509 u. ff.

² Vergl., Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Math. Annalen, 1909, S. 559–575, ferner, Sur la détermination des intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$ par leurs valeurs le long d'un contour fermé, Comptes rendus, 18. 10. 1909.

³ Sur la détermination des intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$ par leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes, Comptes rendus, 29. 11. 1909.

wiederholte Iteration zu einem stetigen Kerne zu gelangen. Nichts desto weniger führt, wie ich in der zweiten der soeben genannten Noten zuerst nachgewiesen habe, die FREDHOLM'sche Methode unmittelbar zum Ziele. Der Behandlung der erwähnten Integralgleichung, insbesondere der genauen Durchführung der etwas schwierigen Iteration ist ein beträchtlicher Teil des ersten Kapitels gewidmet. In dem zweiten Kapitel wird zunächst die GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (2) gebildet; sodann wird ihr Verhalten bei einer unendlich kleinen Aenderung der Form des Gebietes untersucht. Auf die Ergebnisse dieser Betrachtungen gestützt, wird schliesslich, in diesem Umfange zum ersten Male, die bekannte Fundamentalformel bewiesen, welche die Lösung der Differentialgleichung (2) als Funktion ihrer Randwerte angibt. Die bekannten Beweise dieser Formel setzen stillschweigend stetig gekrümmte Gebiete und Randwerte, welche, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetig sind und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, voraus.

Hiermit ist das erste Randwertproblem vollständig erledigt. Die soeben genannte Fundamentalformel gestattet, wie ich an einer anderen Stelle gezeigt habe, eine Anzahl anderer Randwertaufgaben, darunter die Bestimmung periodischer und doppeltperiodischer Lösungen auf die Auflösung linearer Integralgleichungen zurückzuführen.

Kapitel I. Die Auflösung des ersten Randwertproblems.

§ 1.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes, von einer endlichen Anzahl Stücke regulär analytischer Linien¹ begrenztes Gebiet ohne Spitzen.² Die Randkurve von T soll mit S bezeichnet sein.

Wie ich an einer anderen Stelle bewiesen habe, gilt nun der folgende Satz:³

Es sei $z = z(Z) = x(X, Y) + iy(X, Y) = x + iy$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet T in der Ebene (X, Y) auf die Fläche K des Einheitskreises in der Ebene (x, y) konform abgebildet werden kann. Die Peripherie von K sei mit C bezeichnet. Es mögen $A_1 = (X_1, Y_1), \dots, A_k = (X_k, Y_k)$

¹ Durch die Bezeichnung »regulär analytisch« soll angedeutet werden, dass jedes Kurvenstück über die beiden auf ihm liegenden Ecken hinaus analytisch fortgesetzt werden kann.

² Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur einfach zusammenhängende Gebiete. Am Schluss dieses Kapitels wird der allgemeine Fall eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes kurz erledigt werden.

³ Vgl. die inzwischen erschienene Abhandlung des Verfassers, Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken, Journal für Mathematik 1910, S. 100—119.

die Eckpunkte von T sein; $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_k\pi$ mögen die Winkel, welche die Seiten von S entsprechend in A_1, \dots, A_k einschliessen, bezeichnen. Es ist $0 < \alpha_1 \leq 2, \dots, 0 < \alpha_k \leq 2$. Den Punkten $A_i, (i = 1, \dots, k)$ mögen in der Ebene (x, y) die Punkte $B_i = (x_i, y_i), (i = 1, \dots, k)$ entsprechen. Man kann dann setzen

$$(5) \quad \frac{dz}{dZ} = \prod_{i=1}^k (Z - Z_i)^{\frac{1}{\alpha_i} - 1} r_1(Z),$$

oder auch

$$(6) \quad \frac{dz}{dZ} = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{1 - \alpha_i} r_2(z), \quad z_i = p_i + q_i i.$$

Die Funktion $r_1(Z)$ ist in T regulär und auf S stetig. Desgleichen ist $r_2(z)$ in K regulär und auf C stetig. Das Minimum des absoluten Betrages der Funktionen $r_1(Z)$ und $r_2(z)$ ist von Null verschieden.

Es sei jetzt diejenige in T und auf S beschränkte, im Innern von T mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $U(X, Y)$ der Differentialgleichung (2) zu bestimmen, die auf S eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Folge von Werten annimmt.¹ Führt man durch die Gleichungen

$$(7) \quad x = x(X, Y), \quad y = y(X, Y)$$

x und y als neue unabhängige Veränderlichen ein und setzt man $U(X, Y) = u(x, y)$, so geht das zuerst vorgelegte Problem in das folgende über:

Es ist diejenige in K und auf C beschränkte, im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(A \frac{\partial X}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(A \frac{\partial X}{\partial y} + B \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + C u \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right] = F \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right]$$

¹ Ist die Randfunktion beschränkt und im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar, so lautet die Randbedingung genauer: die Lösung $U(X, Y)$ soll bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen, die Begrenzung nicht berührenden Kurve, ausser höchstens in einer Punktmenge vom Masse Null, die vorgeschriebenen Werte annehmen. Es sei vorübergehend die Randfunktion mit $\varphi(s)$ bezeichnet. Wie sich bald zeigen wird, nimmt $U(X, Y)$ jedenfalls in allen denjenigen Punkten die vorgeschriebenen Werte wirklich an, in denen $\varphi(s)$ die Ableitung des unbestimmten Integrals $\int \varphi(s) ds$ darstellt, insbesondere also in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(s)$.

zu bestimmen, die auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt.¹

Wir schreiben zur Vereinfachung

$$a(x, y) = A \frac{\partial X}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad b(x, y) = A \frac{\partial X}{\partial y} + B \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad c(x, y) = C \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$(9) \quad f(x, y) = F \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right], \quad d(x, y) = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} - c(x, y) \\ = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} - C \right],$$

somit

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f.$$

Die Funktionen a und b haben im Innern und auf dem Rande von K , ausser in den Punkten B_i , ($i = 1, \dots, k$), stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Die Funktionen c , d und f sind in K und auf C , ausser in den Punkten B_i stetig; c und f erfüllen im Innern von K die HÖLDER'sche Bedingung. Es sei vorübergehend $r_i = \sqrt{(p - p_i)^2 + (q - q_i)^2}$ gesetzt. Beachten wir die Formel (6), so finden wir

$$(11) \quad a(p, q) = \prod_{i=1}^k r_i^{\alpha_i - 1} \pi(p, q), \quad b(p, q) = \prod_{i=1}^k r_i^{\alpha_i - 1} \nu(p, q), \\ c(p, q) = \prod_{i=1}^k r_i^{2(\alpha_i - 1)} \vartheta(p, q),$$

$$(12) \quad d(p, q) = \prod_{i=1}^k r_i^{2(\alpha_i - 1)} \mu(p, q), \quad f(p, q) = \prod_{i=1}^k r_i^{2(\alpha_i - 1)} \varepsilon(p, q).$$

Die Funktionen π , ν , ϑ , μ , ε sind im Innern und auf dem Rande von K beschränkt und, ausser etwa in den Punkten B_i , stetig.

Es sei C' der Kreis um den Koordinatenursprung in der Ebene (x, y) vom Halbmesser $1 - \delta$. Das von ihm begrenzte Gebiet sei mit K' bezeichnet. Es sei ferner (x, y) ein Punkt im Innern von K' . Wir bezeichnen mit $G'(x, y; p, q)$ die zu dem Gebiete K' gehörige GREEN'sche Funktion im engeren Sinne, mit $v'(x, y)$ diejenige im Innern von K' reguläre Potentialfunktion, die auf C' dieselben Werte

¹ Vgl. die vorhergehende Fussnote.

wie die Funktion $u(x, y)$ annimmt. Einer bekannten Formel der Potentialtheorie zufolge ist

$$(13) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} G'(x, y; p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial u}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial u}{\partial q} + \right. \\ \left. + c(p, q) u(p, q) - f(p, q) \right] dp dq + v'(x, y),$$

oder nach einer teilweisen Integration

$$(14) \quad u(x, y) = - \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} \left[\frac{\partial G'(x, y; p, q)}{\partial p} a(p, q) + \frac{\partial G'(x, y; p, q)}{\partial q} b(p, q) + \right. \\ \left. + d(p, q) G'(x, y; p, q) \right] u(p, q) dp dq + v'(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} f(p, q) G'(x, y; p, q) dp dq.$$

Es sei $v(x, y)$ diejenige beschränkte, im Innern von K reguläre Potentialfunktion, welche auf C , ausser in den Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Randwerte annimmt.¹ Es sei ferner $G(x, y; p, q)$ die zu K gehörige GREEN'sche Funktion im engeren Sinne. Lassen wir jetzt die Grösse δ gegen Null, somit den Kreis K' gegen den Einheitskreis K konvergieren und sehen wir zu, welche die Grenzwerte der einzelnen Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (14) sind.

Nach einer bekannten Formel der Potentialtheorie ist

$$(15) \quad v(x, y) - v'(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n} [v(p_0, q_0) - v'(p_0, q_0)] (1 - \delta) d\theta.$$

Hierin bezeichnen: p_0, q_0 die Koordinaten eines variablen Punktes auf C' , $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte (p_0, q_0) . Wir lassen jetzt beim festgehaltenen Verhältnis $\frac{p_0}{q_0}$ die Grösse δ gegen Null konvergieren. Alsdann ist zunächst

$$(16) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n} = \frac{\partial G(x, y; p, \bar{q})}{\partial n}, \quad \bar{p} = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}, \quad \bar{q} = \frac{q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}.$$

¹ Ist die Randfunktion im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar, so ist im allgemeinen eine gewisse Nullmenge von Randpunkten auszuschliessen. Vergl. FATOU, Séries trigonométriques et séries de TAYLOR, Acta Mathematica, Bd. 30 (1906).

Die Punkte (p_0, q_0) auf C' und (p, q) auf C liegen auf demselben Halbmesser von K .

Es ist weiter, ausser in den Unstetigkeitspunkten der Randfunktion,

$$(17) \quad \lim_{\delta=0} [v(p_0, q_0) - v'(p_0, q_0)] = 0.^1$$

Ferner ist für alle hinreichend kleinen δ und alle θ

$$(18) \quad \left| \frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n} \right| < m_1, \\ |v(p_0, q_0) - v_1(p_0, q_0)| < m_2,$$

worin m_1 und m_2 gewisse positive Werte bezeichnen.

Nach bekannten Sätzen ist

$$(19) \quad \lim_{\delta=0} [v(x, y) - v'(x, y)] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(x, y; \bar{p}, \bar{q})}{\partial n} \lim_{\delta=0} [v(p_0, q_0) - v'(p_0, q_0)] d\theta = 0,$$

$$(20) \quad \lim_{\delta=0} v'(x, y) = v(x, y).^2$$

Es sei, wie vorhin, (x, y) ein Punkt im Innern von K' .

Wir schreiben in der üblichen Weise

$$(21) \quad \begin{cases} G'(x, y; p, q) = \log \frac{1}{\sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}} + g'(x, y; p, q), \\ G(x, y; p, q) = \log \frac{1}{\sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}} + g(x, y; p, q). \end{cases}$$

Nunmehr betrachten wir die Differenz

$$I^{(1)} = \iint_{K'} f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq - \iint_{K'} f(p, q) G'(x, y; p, q) dp dq =$$

¹ In jedem die Unstetigkeitspunkte der Randfunktion nicht enthaltenden Teile von C ist der Grenzübergang gleichmässig.

² Diese Beziehung gilt, wie man leicht zeigen kann, auch wenn die Randfunktion beschränkt und im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar ist.

$$(22) \quad = \int\limits_{K-K'} \int\limits_{K'} f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq + \\ + \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} f(p, q) [g(x, y; p, q) - g'(x, y; p, q)] dp dq = I^{(2)} + I^{(3)}.$$

$G(x, y; p, q)$ ist, als Funktion von (p, q) betrachtet, in dem Gebiete $K-K'$ stetig, die Funktion $f(p, q)$ wird nach (12) in den Punkten B_i , sofern $\alpha_i < 1$, wie $r_i^{2(\alpha_i-1)}$ unendlich. Offenbar wird $I^{(2)}$ mit δ zugleich gleich Null. Beachten wir die bekannte Bedeutung der Funktionen $g(x, y; p, q)$ und $g'(x, y; p, q)$, so überzeugen wir uns leicht, dass man eine Zahl $\delta_1 > 0$ so klein wählen kann, dass für alle $\delta < \delta_1$ in allen Punkten (p, q) von K'

$$(23) \quad |g(x, y; p, q) - g'(x, y; p, q)| < \epsilon$$

wird. Daraus folgt aber

$$(24) \quad |I^{(3)}| < \epsilon \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} |f(p, q)| dp dq < \epsilon \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} |f(p, q)| dp dq = \gamma \epsilon,$$

unter γ eine Konstante verstanden. Es wird daher $I^{(3)}$, somit auch $I^{(1)}$ mit δ zugleich unendlich klein.

In analoger Weise kann gezeigt werden, dass das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (14) für $\delta = 0$ gegen das Integral

$$(25) \quad -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ \left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq$$

konvergiert. Beachten wir dies, so finden wir durch Grenzübergang

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ (26) \quad \left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq + v(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K'} \int\limits_{K'} f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq.$$

Wir erhalten somit als erstes Hauptresultat den Satz:

Jede in K und auf C beschränkte Lösung der partiellen Differentialgleichung (10), die im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten

Ordnung sich stetig verhält und auf dem Rande eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt,¹ ist zugleich eine Lösung der linearen Integralgleichung (26).

Der Auflösung dieser Integralgleichung wenden wir uns nunmehr zu.

§ 2.

In den folgenden Betrachtungen nehmen wir zur Vereinfachung an, dass die Anzahl der Punkte B_i , in denen die Funktionen $a(p, q)$, $b(p, q)$, $c(p, q)$, $d(p, q)$, $f(p, q)$ (für $\alpha_i < 1$) unendlich gross werden können, gleich eins ist. Der allgemeine Fall $k > 1$ erledigt sich in genau derselben Weise, nur dass die Rechnungen entsprechend komplizierter werden. Den einzigen singulären Punkt bezeichnen wir nunmehr mit $H = (i, j)$, den zugehörigen charakteristischen Exponenten mit α . Wir nehmen $0 < \alpha < 1$ an. Der Fall $1 < \alpha < 2$ ist beträchtlich leichter zu erledigen.

Es sei (x^*, y^*) der zu dem Punkte (x, y) in bezug auf den Kreis K konjugierte Punkt. Bekanntlich ist

$$(27) \quad G(x, y; p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} + g(x, y; p, q) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(x^* - p)^2 + (y^* - q)^2}{(x-p)^2 + (y-q)^2} (x^2 + y^2) \right].$$

$g(x, y; p, q)$ ist, als Funktion von (p, q) betrachtet, diejenige in K reguläre Potentialfunktion, welche am Rande die Werte $-\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ annimmt. Wie man leicht zeigen kann, ist

$$(28) \quad |G(x, y; p, q)| < \varrho_0 + \frac{1}{2} |\log \{(x-p)^2 + (y-q)^2\}|,$$

unter ϱ_0 eine gewisse positive Zahl verstanden.

Es ist ferner

$$\left| \frac{\partial g(x, y; p, q)}{\partial p} \right| \leq \frac{1}{[(x^* - p)^2 + (y^* - q)^2]^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{[(x - p)^2 + (y - q)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left| \frac{\partial g(x, y; p, q)}{\partial q} \right| \leq \frac{1}{[(x - p)^2 + (y - q)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

¹ Vgl. die Fussnote auf der Seite 348.

daher

$$(29) \quad \left| \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} \right| < \frac{2}{[(x-p)^2 + (y-q)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left| \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} \right| < \frac{2}{[(x-p)^2 + (y-q)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir bezeichnen den Kern der Integralgleichung (26) mit $K(x, y; p, q)$. Aus (28) und (29) ergibt sich die weitere Ungleichheitsbedingung

$$(30) \quad |K(x, y; p, q)| = \frac{1}{2\pi} \left| a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right.$$

$$\left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right| < P r_{pi}^{a-1} \cdot \frac{1}{[(x-p)^2 + (y-q)^2]^{\frac{1}{2}}} + Q r_{pi}^{2(a-1)} +$$

$$+ R r_{pi}^{2(a-1)} |\log [(x-p)^2 + (y-q)^2]| = K_0(x, y; p, q).$$

Hierin bezeichnet $r_{pi} = r_{ip}$ den Ausdruck

$$r_{pi} = [(p-i)^2 + (q-j)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

P , Q und R sind gewisse positive Werte.

Wir führen zur Vereinfachung die weiteren Bezeichnungen

$$r_{ip'} = r_{p'i} = [(p'-i)^2 + (q'-j)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_{px} = r_{xp} = [(p-x)^2 + (q-y)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_{p'x} = r_{xp'} =$$

$$= [(p'-x)^2 + (q'-y)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad r_{xi} = [(x-i)^2 + (y-j)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

ein und schreiben demgemäss

$$(31) \quad K_0(x, y; p, q) = P r_{pi}^{a-1} \frac{1}{r_{px}} + Q r_{pi}^{2(a-1)} + R r_{pi}^{2(a-1)} |\log r_{px}|.$$

Von dem Kerne $K(x, y; p, q)$ gehen wir zu den iterierten Kernen über. Es soll nunmehr gezeigt werden, dass man nach einer endlichen Anzahl von Iterationen zu einem Kerne von der Form

$$r_{pi}^{2(a-1)} f(x, y; p, q)$$

gelangen wird. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$.¹

Neben dem Kerne $K(x, y; p, q)$ und seinen Iterationen $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots$ betrachten wir den Kern $K_0(x, y; p, q)$ und die aus ihm durch wiederholte Iteration

¹ In meiner zweiten Comptes rendus Note habe ich irrtümlicherweise angegeben, diese Form käme bereits dem zweiten iterierten Kerne zu.

entstandenen Kerne $K_0^{(1)}, K_0^{(2)}, \dots$. Unter diesen gibt es, wie gleich gezeigt werden soll, einen Kern $K_0^{(n)}$, welcher der Ungleichheitsbedingung

$$(32) \quad K_0^{(n)}(x, y; p, q) < \Theta r_{pi}^{2(\alpha-1)},$$

unter Θ eine gewisse positive Grösse verstanden, genügt.

Betrachten wir den Kern

$$K_0^{(1)}(x, y; p, q) = \iint_K K_0(x, y; p', q') K_0(p', q'; p, q) dp' dq'.$$

Die Funktion $K_0^{(1)}(x, y; p, q)$ besteht aus einem Aggregat von Gliedern von der Form

$$\begin{aligned} I_1 &= r_{pi}^{\alpha-1} \iint_K r_{p'i}^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq'; \quad I_2 = r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K \frac{1}{r_{p'x}} \cdot r_{p'i}^{\alpha-1} dp' dq'; \\ I_3 &= r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K r_{p'i}^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot |\log r_{p'p}| dp' dq'; \quad I_4 = r_{pi}^{\alpha-1} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq'; \\ (33) \quad I_5 &= r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} dp' dq'; \quad I_6 = r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} |\log r_{p'p}| dp' dq'; \\ I_7 &= r_{pi}^{\alpha-1} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} |\log r_{p'x}| \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq'; \quad I_8 = r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} |\log r_{p'x}| dp' dq'; \\ I_9 &= r_{pi}^{2(\alpha-1)} \iint_K r_{p'i}^{2(\alpha-1)} |\log r_{p'x}| |\log r_{p'p}| dp' dq'. \end{aligned}$$

Wir suchen jetzt diese Ausdrücke einzeln abzuschätzen. Es mögen w_1, w_2, ν positive Zahlen bezeichnen. Ist $w_1 \geq w_2$, so ist $\frac{1}{w_1^\nu w_2} \leq \frac{1}{w_2^{1+\nu}}$, ist dagegen $w_1 \leq w_2$, so ist $\frac{1}{w_1^\nu w_2} \leq \frac{1}{w_1^{1+\nu}}$. In beiden Fällen ist daher

$$(34) \quad \frac{1}{w_1^\nu w_2} < \frac{1}{w_1^{1+\nu}} + \frac{1}{w_2^{1+\nu}}.$$

Betrachten wir den Ausdruck I_1 . Aus (34) folgt, dass

$$\begin{aligned}
 I_1 &< r_{pi}^{\alpha-1} \iint_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' + r_{pi}^{\alpha-1} \iint_K \frac{1}{r_{p'x}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' < \\
 (35) \quad &< r_{pi}^{\alpha-1} \iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' + r_{pi}^{\alpha-1} \iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'x}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' = I_{10} + I_{11}.
 \end{aligned}$$

In I_{10} und I_{11} sind die Integrale über die ganze unendliche Ebene zu erstrecken.

Um den Ausdruck I_{10} abzuschätzen, setzen wir vorübergehend $r_{pi} = h$, $p = hp$, $q = hq$, $r_{pp'} = V(\bar{p} - \bar{p}')^2 + (\bar{q} - \bar{q}')^2$ u. s. w.¹ Wir erhalten

$$\iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' = \frac{1}{h^{1-\alpha}} \iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq'.$$

Da nunmehr $r_{pi} = 1$ ist, so ist das Integral rechts eine Konstante. Wir setzen

$$\iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' = \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \cdot \theta_1.$$

In analoger Weise finden wir

$$\iint_{(0)} \frac{1}{r_{p'x}^{2-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}} dp' dq' = \frac{1}{r_{px}^{1-\alpha}} \cdot \theta_2.$$

θ_2 bezeichnet ebenso, wie die später vorkommenden Grössen $\theta_3, \theta_4, \dots$ eine gewisse Konstante. Wir erhalten somit

$$(36) \quad I_1 < \theta_1 \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}} + \theta_2 \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha} r_{px}^{1-\alpha}}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(37) \quad I_2 < \theta_3 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}.$$

Es sei $\alpha' < \alpha$ eine beliebig kleine positive Zahl. Bei geeigneter Festsetzung einer positiven Zahlgrösse θ_4 , können wir setzen

¹ Diese Transformation entnehme ich der Abhandlung von Herrn PETRINI, Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique, Journal de Mathématiques, 1909, p. 127–223. Sie leistet auch bei der Abschätzung verschiedener anderer Integrale gute Dienste.

$$I_3 < \theta_4 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}} \iint_K \frac{1}{r_{p'i}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}^{1-\alpha}} dp' dq' < \theta_4 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}} \iint_K \left[\frac{1}{r_{p'i}^{2-\alpha+\alpha'}} + \frac{1}{r_{p'x}^{2-\alpha+\alpha'}} + \frac{1}{r_{p'p}^{2-\alpha+\alpha'}} \right] dp' dq' < \theta_5 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}},$$

$$I_7 < \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \iint_K \frac{1}{r_{p'p}} \left[\frac{1}{r_{p'i}^{2-2\alpha+\alpha'}} + \frac{1}{r_{p'x}^{2-2\alpha+\alpha'}} \right] dp' dq' < \theta_6 \frac{1}{r_{pi}^{2-3\alpha+\alpha'}} + \theta_7 \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-2\alpha+\alpha'}} < \\ < \theta'_6 \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}} + \theta'_7 \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-\alpha}}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$I_4 < \theta_8 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}, \quad I_5 < \theta_9 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}, \quad I_6 < \theta_{10} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}, \quad I_8 < \theta_{11} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}, \quad I_9 < \theta_{12} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}},$$

daher schliesslich

$$(38) \quad K_0^{(1)}(x, y; p, q) < \theta_{13} \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}} + \theta_{14} \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-\alpha}}.$$

Wir bilden jetzt den Kern

$$(39) \quad K_0^{(2)}(x, y; p, q) = \iint_K K_0^{(1)}(x, y; p', q') K_0^{(1)}(p', q'; p, q) dp' dq'.$$

Nunmehr haben wir folgende Ausdrücke abzuschätzen:

$$I_{12} = \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}} \iint_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-2\alpha}} dp' dq', \quad I_{13} = \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \iint_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-2\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{pp'}} dp' dq', \\ I_{14} = \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}} \iint_K \frac{1}{r_{p'x}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'i}^{1-\alpha}} dp' dq', \quad I_{15} = \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \iint_K \frac{1}{r_{p'x}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'i}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}^{1-\alpha}} dp' dq'.$$

Die Betrachtungen, die den soeben durchgeführten ganz analog sind, ergeben die Ungleichheitsbedingungen

$$I_{12} < \theta_{15} \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}}, \quad I_{13} < \theta_{16} \frac{1}{r_{pi}^{2-4\alpha}}, \quad I_{14} < \theta_{17} \frac{1}{r_{pi}^{2-2\alpha}}, \quad I_{15} < \theta_{18} \frac{1}{r_{pi}^{2-4\alpha}} + \theta_{19} \frac{1}{r_{pi}^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-3\alpha}},$$

somit

$$(40) \quad K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta_{21} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-3a}}.$$

Der nächstfolgende iterierte Kern

$$K_0^{(3)}(x, y; p, q) = \iint_K K_0^{(2)}(x, y; p', q') K_0^{(2)}(p', q'; p, q) dp' dq'$$

erfüllt die Ungleichheitsbedingung

$$(41) \quad K_0^{(3)}(x, y; p, q) < \theta_{22} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}} + \theta_{23} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-7a}}.$$

So geht man weiter. Nach einer *endlichen* Anzahl von Iterationen erhält man einen Kern $K_0^{(n)}$, welcher die Ungleichheitsbedingung erfüllt

$$(42) \quad K_0^{(n)}(x, y; p, q) < \Theta \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}.$$

Kehren wir nunmehr zu dem Kerne $K(x, y; p, q)$ der Integralgleichung (26) zurück. Man überzeugt sich leicht, dass die iterierten Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots$ sich stetig verhalten, ausser höchstens wenn (43) $x = p, y = q$ oder (44) $p = i, q = j$ wird. Überdies ist für alle p

$$(45) \quad |K^{(n)}(x, y; p, q)| < K_0^{(n)}(x, y; p, q).$$

Der Ausdruck $r_{pi}^{2(1-a)} K^{(n)}(x, y; p, q)$ stellt somit eine beschränkte Funktion von $x, y; p, q$ dar, die mit etwaiger Ausnahme der Werte (43) und (44) ihrer Argumente sich stetig verhält. Man überzeugt sich nunmehr leicht, dass der Kern

$$(46) \quad K^{(n+1)}(x, y; p, q) = \iint_K K^{(n)}(x, y; p', q') K^{(n)}(p', q'; p, q) dp' dq'$$

in der Form

$$(47) \quad K^{(n+1)}(x, y; p, q) = r_{pi}^{2(a-1)} f(x, y; p, q)$$

¹ Die für $K_0^{(2)}$ aufgestellten Ungleichheitsbedingungen gelten für $a < \frac{1}{3}$. Ist $a = \frac{1}{3}$, so ist z. B. $K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta'_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta'_{21} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} |\log r_{px}|$. Ist $a > \frac{1}{3}$, so erhält man

$$K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta''_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta''_{21} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \frac{1}{r_{px}^{1-3a}}.$$

dargestellt werden kann. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$.

Ist die Anzahl k der Punkte, die wir am Anfange dieses Kapitels mit $B_i = (p_i, q_i)$, ($i = 1, \dots, k$) bezeichnet haben, mithin die Anzahl der Eckpunkte des Gebietes T grösser als eins, so führt die wiederholte Iteration nach einer *endlichen* Anzahl von Operationen auf einen Kern von der Form

$$(48) \quad K^*(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q) \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{r p_i^{2(1-\alpha_i)}}.$$

Hierin bezeichnet $f^*(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Der Ausdruck $r p_i$ ist mit der am Anfang dieses Kapitels mit r_i bezeichneten Grösse identisch.

Die Integralgleichung (26) ist der Integralgleichung

$$(49) \quad u(x, y) + \iint_K K^*(x, y; p, q) u(p, q) dp dq = \psi(x, y)$$

äquivalent. Der Ausdruck $\psi(x, y)$ stellt eine in K und auf C beschränkte, im Innern von K stetige Funktion dar. Am Rande nimmt $\psi(x, y)$, ausser in den etwaigen Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Werte an.

Betrachten wir allgemeiner die Integralgleichung

$$(50) \quad u(x, y) + \lambda \iint_K K^*(x, y; p, q) u(p, q) dp dq = \psi(x, y).$$

Man bemerkt leicht, dass es nicht möglich ist, durch wiederholte Iteration zu einem

¹ Wir nehmen $0 < \alpha_i < 1$ an. Wir können daher die Beziehungen (11) durch die Gleichungen $a(p, q) = \sum_i r_i^{\alpha_i-1} \pi_1(p, q)$; $b(p, q) = \sum_i r_i^{\alpha_i-1} \nu_1(p, q)$; $c(p, q) = \sum_i r_i^{\alpha_i-1} \vartheta_1(p, q)$; $d(p, q) = \sum_i r_i^{2(\alpha_i-1)} \mu_1(p, q)$; $f(p, q) = \sum_i r_i^{2\alpha_i-1} \varepsilon_1(p, q)$, worin $\pi_1, \dots, \varepsilon_1$ gewisse in K und auf C beschränkte, in K stetige Funktionen bezeichnen, ersetzen. Hierdurch wird die Abschätzung der iterierten Kerne etwas übersichtlicher. Als Endergebnis erhält man die Formel (48), für die man auch ebenso gut hätte

$$K^*(x, y; p, q) = f_1^*(x, y; p, q) \prod_{i=1}^k \frac{1}{r p_i^{2(1-\alpha_i)}}$$

setzen können.

überall stetigen Kerne zu gelangen; alle iterierten Kerne haben, in der Tat, die Gestalt

$$K(x, y; p, q) = f(x, y; p, q) \sum_{i=1}^k \frac{1}{r^{2(1-a_i)} p^{p_i}},$$

worin $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von x, y, p, q bezeichnet. Nichts desto weniger bleibt, wie sich gleich zeigen wird, die FREDHOLM'sche Theorie auf die Integralgleichung (50) im vollen Umfange anwendbar.

Es möge zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{r^{2(1-a_i)} p^{p_i}} = q(p, q), \quad K^*(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q) q(p, q)$$

gesetzt werden. Betrachten wir den FREDHOLM'schen Ausdruck

$$(51) \quad H(x, y; p, q; \lambda) = \frac{\sum_0^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_m(x, y; p, q)}{1 + \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_m}{m!} A_m} = \frac{D\left(\lambda; \begin{smallmatrix} x, y \\ p, q \end{smallmatrix}\right)}{D(\lambda)}.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$(52) \quad A_m(x, y; p, q) = \int \dots \int \begin{vmatrix} f^*(x, y; p, q) q(p, q); f^*(s_1, t_1; p, q) q(p, q); \dots & f^*(s_m, t_m; p, q) q(p, q) \\ f^*(x, y; s_1, t_1) q(s_1, t_1); f^*(s_1, t_1; s_1, t_1) q(s_1, t_1); \dots & f^*(s_m, t_m; s_1, t_1) q(s_1, t_1) \\ f^*(x, y; s_2, t_2) q(s_2, t_2); f^*(s_1, t_1; s_2, t_2) q(s_2, t_2); \dots & f^*(s_m, t_m; s_2, t_2) q(s_2, t_2) \\ \dots & \dots \\ f^*(x, y; s_m, t_m) q(s_m, t_m); f^*(s_1, t_1; s_m, t_m) q(s_m, t_m); \dots & f^*(s_m, t_m; s_m, t_m) q(s_m, t_m) \end{vmatrix}$$

$$ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 \dots ds_m dt_m, \quad A_0(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q) q(p, q),$$

$$(53) \quad A_m = \int \int_{K'} A_m(s_0, t_0; s_0, t_0) ds_0 dt_0,$$

Für (52) können wir auch setzen

$$(54) \quad A_m(x, y; p, q) = q(p, q) \int \cdots \int \begin{vmatrix} f^*(x, y; p, q); f^*(s_1, t_1; p, q); \dots & f^*(s_m, t_m; p, q) \\ f^*(x, y; s_1, t_1); f^*(s_1, t_1; s_1, t_1); \dots & f^*(s_m, t_m; s_1, t_1) \\ \vdots & \vdots \\ f^*(x, y; s_m, t_m); f^*(s_1, t_1; s_m, t_m); \dots & f^*(s_m, t_m; s_m, t_m) \end{vmatrix} \\ \cdot q(s_1, t_1) q(s_2, t_2) \dots q(s_m, t_m) \cdot ds_1 dt_1 \dots ds_m dt_m.$$

Es sei $M = \text{Max } |f^*(x, y; p, q)|$ für alle $x, y; p, q$ in K und auf C ,

$$\sigma = \iint_K q(s, t) ds dt.$$

Der bekannte Determinantensatz von Herrn HADAMARD ergibt, wie man leicht sieht, die Ungleichheitsbedingungen

$$(55) \quad \left| \frac{A_m(x, y; p, q)}{q(p, q)} \right| < (m+1)^{\frac{m+1}{2}} M^{m+1} \sigma^m,$$

$$|A_m| < m^2 M^m \sigma^m.$$

Offenbar ist

$$\frac{H(x, y; p, q; \lambda)}{q(p, q)}$$

eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$ und eine meromorphe Funktion von λ . Wir setzen

$$(56) \quad H(x, y; p, q; \lambda) = h(x, y; p, q; \lambda) \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda^{2(1-a_i)} p p_i}.$$

Ist $\lambda = 1$ keine Unendlichkeitsstelle der Funktion $h(x, y; p, q; \lambda)$, so lässt sich in bekannter Weise zeigen, dass die Funktion

$$\psi(x, y) - \iint_K H(x, y; p, q; 1) \psi(p, q) dp dq$$

die Lösung der Integralgleichung (49) darstellt.

Ist λ eine Nullstelle von $D(\lambda)$, so ist die homogene Integralgleichung

$$u(x, y) + \lambda \iint_K K^*(x, y; p, q) u(p, q) dp dq = 0$$

auflösbar. Die Übertragung der bekannten weiteren Schlüsse von Herrn FREDHOLM bietet keine Schwierigkeiten.

§ 3.

Wir haben in § 1 gezeigt, dass jede beschränkte Lösung der Differentialgleichung (10), die sich mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung in K stetig verhält und auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt, zugleich eine Lösung der Integralgleichung (26) darstellt. Eine auf C verschwindende, in K stetige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

ist insbesondere eine Lösung der zu (26) gehörigen homogenen Integralgleichung.

Es sei jetzt umgekehrt $u(x, y)$ eine Lösung der Integralgleichung (26) oder der zugehörigen homogenen Integralgleichung. Wir wollen zeigen, dass $u(x, y)$ im Innern von K stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung hat und entsprechend der Differentialgleichung (10) oder der zugehörigen homogenen Differentialgleichung genügt. Im ersteren Falle nimmt $u(x, y)$ auf C die vorgeschriebenen Randwerte; im letzteren Falle ist $u(x, y)$ auf dem Rande des Gebietes gleich Null.

Es sei $r(p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Betrachten wir das logarithmische Potential

$$R(x, y) = \frac{1}{2} \iint_K r(p, q) \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp dq.$$

Nach einem bekannten Hilfssatze erfüllen die Funktionen

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \iint_K r(p, q) \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp dq,$$

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \iint_K r(p, q) \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp dq$$

in K und auf C die HÖLDER'sche Bedingung

$$\left| \frac{\partial R(x+h, y+h')}{\partial x} - \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} \right| \leq \gamma[|h| + |h'|]^{\lambda},$$

$$\left| \frac{\partial R(x+h, y+h')}{\partial y} - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right| \leq \gamma[|h| + |h'|]^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

unter γ eine gewisse positive Grösse verstanden.¹

Es sei jetzt K' wie in § 1 die mit K konzentrische Kreisfläche vom Halbmesser $1 - \delta$. Betrachten wir die Integralgleichung (26). Das erste Integral rechterhand erfüllt, wie aus dem soeben erwähnten Hilfssatze geschlossen werden kann, im Innern von K die HÖLDER'sche Bedingung; die beiden übrigen Glieder besitzen daselbst stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung; daher genügt $u(x, y)$ in K der HÖLDER'schen Bedingung. Die Funktionen $a(p, q)$ und $b(p, q)$ besitzen im Innern von K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Aus den bekannten Sätzen der Potentialtheorie folgt nunmehr, dass $u(x, y)$ im Innern von K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Wir setzen jetzt

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} \right. \\ (57) \\ \left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq - \frac{1}{2\pi} \iint_{K-K'} + v(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_K f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq,$$

¹ Vrgl. U. DINI, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, Acta Mathematica, Bd. 25 (1902), S. 185-230. Siehe insbesondere S. 191-196.

oder nach einer teilweisen Integration

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} G(x, y; p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial u(p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial u(p, q)}{\partial q} + \right. \\
 & \left. + c(p, q) u(p, q) \right] dp dq - \frac{1}{2\pi} \iint_{K-K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + \right. \\
 (58) \quad & \left. + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq - \\
 & \frac{1}{2\pi} \int_{C'} u(p, q) G(x, y; p, q) [a(p, q) dq - b(p, q) dp] - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \iint_K f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq + v(x, y).
 \end{aligned}$$

Eine Wiederholung der zuletzt durchgeführten Überlegung zeigt zunächst, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ in K' der HÖLDER'schen Bedingung genügen; daraus folgt aber, dass die Lösung $u(x, y)$ im Innern von K' stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Die über C' und $K - K'$ erstreckten Integrale stellen im Innern von K' reguläre Potentialfunktionen dar. Nach bekannten Sätzen ist somit, wie behauptet,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u + f(x, y).$$

Nun die Randwerte der Funktion $u(x, y)$. Es sei B_0 irgendein Punkt auf der Peripherie der Kreisfläche K ; insbesondere kann B_0 mit irgendeinem der Punkte B_i , ($i = 1, \dots, k$) zusammenfallen. In den folgenden Ausführungen nehmen wir gerade diesen, offenbar schwierigeren Fall an und setzen etwa $B_0 = B_1$. Um den Punkt $B_0 = B_1$ beschreiben wir zwei kleine Kreise P_1 und P_2 von den Halbmessern η_1 und $\eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Die Gebiete, die sie mit K gemeinsam haben, mögen entsprechend mit K_1 und K_2 bezeichnet sein. Betrachten wir das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (26):

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right.$$

$$(59) \quad + d(p, q) G(x, y; p, q) \Big] dp dq = - \int \int_{\dot{K}} u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq \\ = - \int \int_{\dot{K}_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq - \int \int_{K-K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq.$$

Es sei ε eine beliebig kleine positive Grösse. Wir können r_1 so klein annehmen, dass für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von K_2

$$(60) \quad \int \int_{\dot{K}_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. In der Tat ist, beispielsweise,

$$(61) \quad \left| \int \int_{\dot{K}_1} u(p, q) a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} dp dq \right| < \omega \int \int_{\dot{K}_1} \frac{1}{r^{1-\alpha_1}} \cdot \frac{1}{r_{px}} dp dq < \\ < \omega \int \int_{\dot{K}_1} \frac{1}{r^{2-\alpha_1}} dp dq + \omega \int \int_{\dot{K}_1} \frac{1}{r^{2-\alpha_1}} dp dq,$$

worin ω eine gewisse positive Grösse bezeichnet. Die beiden zuletzt hingeschriebenen Doppelintegrale konvergieren aber mit r_1 gegen Null.

Die Funktionen $\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p}$, $\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q}$, $G(x, y; p, q)$ sind für alle (x, y) in K_2 und alle (p, q) in $K-K_1$ (mit Einschluss der Begrenzung der beiden Gebiete) stetig. Sie sind für alle (x, y) auf dem in P_2 enthaltenen Teile von G und alle (p, q) im Innern und auf dem Rande von $K-K_1$ gleich Null. Die Funktion $u(p, q)$ ist beschränkt. Beachten wir dies, so sehen wir, dass man bei festgehaltenem r_1 die Zahl r_2 so klein wählen kann, dass für alle (x, y) in K_2

$$(62) \quad \left| \int \int_{K-K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Aus (60) und (62) ergibt sich für alle (x, y) in K_2 die weitere Ungleichbedingung

$$(63) \quad \left| \int \int_K u(p, q) K(x, y; p, q) dp dq \right| < \varepsilon.$$

Der Ausdruck (63) konvergiert mit ι_2 gegen Null, übrigens, wie eine genauere Durchführung der angedeuteten Rechnungen zeigt, für alle Punkte der Kurve C in gleichem Grade. Dieselbe Eigenschaft kommt dem Integrale

$$\int \int_K f(p, q) G(x, y; p, q) dp dq$$

zu. Hieraus und aus der Gleichung (26) folgt, wie behauptet, dass die Randwerte der Lösung $u(x, y)$ mit den Randwerten der Potentialfunktion $v(x, y)$ übereinstimmen.¹ Ist insbesondere $f(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, genügt also $u(x, y)$ der zu (26) gehörigen homogenen Integralgleichung, so ist $u(x, y)$ eine am Rande verschwindende Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Wir haben zur Vereinfachung das zuerst vorgelegte Gebiet T einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Es sei jetzt T mehrfach zusammenhängend. Das Gebiet T lässt sich durch Vermittelung einer analytischen Funktion $z = z(Z)$, deren Verhalten in der Nachbarschaft der Ecken durch die Gleichungen (5) und (6) charakterisiert ist, auf ein von geschlossenen analytischen, singularitätenfreien Kurven begrenztes Gebiet R konform abbilden. Hierdurch wird das vorliegende Problem auf die Bestimmung derjenigen beschränkten, im Innern des Gebietes R mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetigen Lösung der Differentialgleichung (10) zurückgeführt, die auf den, als geschlossen und regulär analytisch vorauszusetzenden, Randkurven L vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolgen annimmt. Dieses Problem wird mutatis mutandis wie das vorhin ausführlich betrachtete speziellere Problem erledigt. Der Kreis C' ist hierbei durch die im Innern des Gebietes R zu den Begrenzungskurven L im Abstände δ gezeichneten gleichfalls regulär analytischen Parallelkurven L' zu ersetzen. Die GREEN'sche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ hat nicht mehr die einfache Gestalt (27), sodass die Entwicklungen entsprechend komplizierter ausfallen. Prinzipielle Schwierigkeiten treten indessen nicht auf, weshalb von der Durchführung der Rechnungen an dieser Stelle abgesehen werden kann.

Wir fassen jetzt die Ergebnisse dieses Kapitels in dem folgenden Satze zusammen:

¹ Vgl. die Fussnote auf der Seite 348.

Es sei T ein von einer endlichen Anzahl Stücke regulär analytischer Kurven begrenztes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet ohne Spitzen. Auf den Randkurven S von T mögen abteilungsweise stetige Folgen von Werten vorgeschrieben sein. Es mögen ferner A , B , C und F stetige Funktionen von X , Y bezeichnen. A und B haben in T und auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, C und F genügen in T der HÖLDER'schen Bedingung (1). Alsdann tritt von zwei möglichen Fällen der eine oder der andere ein. Entweder hat die nicht homogene partielle Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + C U = F$$

eine und nur eine beschränkte, in T mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige Lösung, welche, ausser in den Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Werte annimmt, oder die homogene partielle Differentialgleichung

$$(64) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + C U = 0$$

hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, die im Innern von T sich mit ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen stetig verhalten und auf dem Rande verschwinden. Im ersteren Falle hat die homogene Differentialgleichung (64) keine stetige, von Null verschiedene, am Rande verschwindende Lösung. In dem anderen Falle hat die partielle Differentialgleichung (2) nur für spezielle Funktionen $F(x, y)$ stetige, am Rande verschwindende Lösungen, die homogene Differentialgleichung (64) ist nur für spezielle Randwerte in dem hier gemeinten Sinne lösbar.

Die Integralgleichung (26) liefert in allen Fällen alle Lösungen des Randwertproblems.

Der obige Satz gilt, wie man sich leicht überzeugt, im vollen Umfange, wenn die Begrenzung des Gebietes T aus geschlossenen Kurven S mit durchweg stetiger Tangente und abteilungsweise stetiger Krümmung besteht. Denn man kann gewiss T durch Vermittelung einer analytischen Funktion $z = z(Z)$, deren Ableitung $\frac{dz}{dZ}$ in T und auf S stetig und von Null verschieden ist, auf ein von geschlossenen regulär analytischen Kurven begrenztes Gebiet konform abbilden.

Kapitel II. Die zu dem ersten Randwertproblem gehörige Green'sche Funktion.

§ 1.

Der Einfachheit halber betrachten wir in diesem Kapitel nur einfach zusammenhängende Gebiete. Wir nehmen ferner die Anzahl der Ecken des Gebietes T wieder gleich eins an.

In der Ebene (x, y) entspricht T , wie vorhin, der Einheitskreis K ; der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + C U = F$$

entspricht die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f.$$

Wir nehmen im folgenden an, dass die homogene partielle Differentialgleichung

$$(3) \quad L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

keine von Null verschiedene, im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, auf C verschwindende Lösung hat.

Es sei (x_1, y_1) ein Punkt im Innern von K . Wir suchen eine in K , ausser im Punkte (x_1, y_1) , mit ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, am Rande verschwindende Lösung $u^*(x, y)$ der Differentialgleichung (3) zu bestimmen, die sich in der Nähe von (x_1, y_1) wie

$$\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

verhält. Die Differenz

$$(4) \quad u^*(x, y) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = U^*(x, y)$$

soll eine beschränkte, in K und auf C , ausser vielleicht in (x_1, y_1) , stetige Funktion von x und y darstellen. Die Randwerte von $U^*(x, y)$ sind gleich

$$\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Für $U^*(x, y)$ ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} + a \frac{\partial U^*}{\partial x} + b \frac{\partial U^*}{\partial y} + c U^* &= L \left[-\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \right] \\ (5) \quad &= \frac{a(x-x_1) + b(y-y_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \frac{1}{2} c \log [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] = \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(x, y)$ verhält sich in jedem den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teile des Gebietes K stetig und erfüllt daselbst die HÖLDER'sche Bedingung. In der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) wird $\Phi(x, y)$ wie

$$[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

unendlich. Das Doppelintegral

$$(6) \quad J(x, y) = \iint_K G(x, y; p, q) \Phi(p, q) dp dq$$

ist, als Funktion von (x, y) betrachtet, in K und auf C stetig. Nach den bekannten Sätzen der Potentialtheorie sind partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $J(x, y)$ überall in K , den Punkt (x_1, y_1) ausgenommen, vorhanden und stetig. In der Umgebung von (x_1, y_1) werden die Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}$ logarithmisch unendlich.¹

Es sei jetzt $\bar{U}(x, y)$ die Lösung der linearen Integralgleichung

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_K U(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ (7) \quad &\left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq + g(x_1, y_1; x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi(p, q) G(x, y; p, q) dp dq, \end{aligned}$$

worin $g(x_1, y_1; x, y)$ die durch die Gleichung (27) des Kapitels I definierte Funk-

¹ Dies lässt sich mit Hilfe des Verfahrens, welches wir in I § 2 zur Abschätzung des Integrals I_{10} benutzt hatten, leicht zeigen.

tion bezeichnet. Man kann wie in I § 3 zeigen, dass $U(x, y)$ in K stetig ist und in jedem den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teilgebiete von K der HÖLDER'schen Bedingung genügt und daher auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Bei der jetzt folgenden teilweisen Integration (entsprechend der Formel (58) in I § 3) ist (x_1, y_1) durch einen kleinen Kreis K'' von dem Integrationsgebieten auszuschliessen. In $K' - K''$ erfüllen $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$ die HÖLDER'sche Bedingung. In demselben Gebiete hat daher $U(x, y)$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung und erfüllt die Differentialgleichung (5). Offenbar ist $U(x, y)$ nichts anderes als die gesuchte Lösung $U^*(x, y)$. Wir setzen

$$(8) \quad U^*(x, y) = \gamma(x_1, y_1; x, y),$$

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \gamma(x_1, y_1; x, y) = \Gamma(x_1, y_1; x, y).$$

$\Gamma(x_1, y_1; x, y)$ ist die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (3).

§ 2.

Es möge jetzt K' wie im Kapitel I die mit K konzentrische Kreisfläche vom Halbmesser $1 - \delta = \varrho$ bezeichnen. Wir beweisen, dass es eine Zahl δ_1 gibt, so dass für alle $\delta < \delta_1$ die Differentialgleichung (3) keine von Null verschiedene, im Innern von K' mit ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, auf dem Rande C' von K' verschwindende Lösung hat. Hieraus wird dann sofort gefolgert, dass die zu K' gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (3) existiert. Wir bezeichnen sie mit

$$(9) \quad I'(x_1, y_1; x, y) = \gamma'(x_1, y_1; x, y) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2},$$

worin jetzt (x_1, y_1) und (x, y) zwei Punkte in K' bezeichnen. Wir beweisen alsdann, dass

$$(10) \quad \lim_{\delta=1} \gamma'(x_1, y_1; x, y) = \gamma(x_1, y_1; x, y).$$

Es sei, entgegen unserer Voraussetzung, $w(x, y)$ eine in K' samt ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige, auf C' verschwindende Lösung der Differentialgleichung (3). Führen wir durch die Formeln (11) $x = \varrho x_0$, $y = \varrho y_0$ neue Variablen ein und setzen wir

$$w(x, y) = w_0(x_0, y_0), \quad \varrho a(x, y) = a_0(x_0, y_0), \quad \varrho b(x, y) = b_0(x_0, y_0), \\ \varrho^2 c(x, y) = c_0(x_0, y_0), \quad \varrho^2 d(x, y) = d_0(x_0, y_0),$$

so geht die Differentialgleichung (3) über in

$$(12) \quad \Delta(w_0) = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2} + a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + b_0 \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + c_0 w_0 = 0.$$

Nach dem, was wir im Kapitel I gesehen haben, muss $w_0(x, y)$ der linearen homogenen Integralgleichung

$$(13) \quad w_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_K w_0(p, q) \left[a_0(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b_0(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ \left. + d_0(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq$$

genügen. Nach der Voraussetzung hat nun die homogene Integralgleichung

$$(14) \quad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_K u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ \left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp dq$$

keine von Null verschiedene stetige Lösung. Wir zeigen, dass auch die Integralgleichung (13) keine von Null verschiedene stetige Lösungen haben kann, sobald $1 \geq \varrho \geq 1 - \delta_1$. Damit werden bereits die beiden ersten der vorhin ausgesprochenen Behauptungen bewiesen sein.

Wir führen den Punkt $H_0 = \left(\frac{1}{\varrho} i, \frac{1}{\varrho} j \right) = (i_0, j_0)$ ein und bezeichnen die Entfernung der Punkte (p, q) und (i_0, j_0) mit r_{pi_0} . Die Funktionen $a_0(p, q)$, $b_0(p, q)$, $d_0(p, q)$ sind für alle $\varrho < 1$ in K und auf C stetig. Die Produkte

$$(15) \quad r_{pi_0}^{1-\alpha} a_0(p, q), \quad r_{pi_0}^{1-\alpha} b_0(p, q), \quad r_{pi_0}^{2(1-\alpha)} d_0(p, q)$$

sind für alle ϱ , die der Bedingung $1 \geq \varrho \geq 1 - \delta'$, $\delta' < 1$ genügen, in K und auf C dem absoluten Betrage nach kleiner, als eine gewisse positive Zahl M_0 . Mit verschwindendem $\delta = 1 - \varrho$ gehen die Funktionen (15) in jedem den Punkt $H = (i, j)$ nicht enthaltenden Teile des Gebietes K gleichmässig über in

$$r_{pi}^{1-\alpha} a(p, q), \quad r_{pi}^{1-\alpha} b(p, q), \quad r_{pi}^{2(1-\alpha)} d(p, q).^1$$

¹ Wir betrachten im folgenden, wie im Kapitel I, den schwierigeren Fall $0 < \alpha < 1$. Ist $1 \leq \alpha \leq 2$, so sind die Funktionen a, b, c, d und f im Punkte H stetig.

Wie wir im Kapitel I gesehen haben, geht die Integralgleichung (14) nach einer endlichen Anzahl von Iterationen in eine Integralgleichung von der Form

$$(16) \quad u(x, y) + \iint_K f(x, y; p, q) \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}} u(p, q) dp dq = 0$$

über. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Gleichzeitig geht die Integralgleichung (13) über in die Gleichung

$$(17) \quad w_0(x, y) + \iint_K f_0(x, y; p, q) \frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}} w_0(p, q) dp dq = 0.$$

Durch eine Rechnung, die zwar umständlich ist, aber keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet und daher an dieser Stelle übergangen werden kann, lässt sich zeigen, dass mit verschwindendem $\delta = 1 - \alpha$ der absolute Betrag der Differenz

$$f(x, y; p, q) - f_0(x, y; p, q)$$

gleichmässig gegen Null konvergiert.

Denken wir uns in die Integralgleichungen (16) und (17) den Parameter λ eingeführt und betrachten wir die Nenner $D(\lambda)$ und $D_0(\lambda)$ der zu (16) und (17) gehörigen FREDHOLM'schen Quotienten (vergl. die Formeln (51) bis (55) des ersten Kapitels). Die Glieder der Reihe $D_0(\lambda)$ gehen für $\delta = 0$ stetig in die korrespondierenden Glieder der Reihe $D(\lambda)$ über. Die Reihen $D_0(\lambda)$ und $D(\lambda)$ konvergieren für alle endlichen Werte von $|\lambda|$ und alle δ , die der Ungleichheitsbedingung $0 \leq \delta < \delta' < 1$ genügen, in gleichem Grade. Nach bekannten Sätzen ist daher für alle endlichen λ

$$\lim_{\delta=0} D_0(\lambda) = D(\lambda).$$

Nach der Voraussetzung ist $D(1)$ von Null verschieden. Man kann daher, in der Tat, eine Zahl δ_1 so klein annehmen, dass für alle $\delta < \delta_1$ auch $D_0(1) \neq 0$ wird. Damit sind die beiden ersten Teile unserer Behauptung bereits bewiesen.

Betrachten wir nunmehr die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$, wofür wir der Kürze halber vorübergehend $U'(x, y)$ setzen wollen. Wir führen die Substitution

$$x = \varrho x_0, y = \varrho y_0; x_1 = \varrho x_1^0, y_1 = \varrho y_1^0$$

ein und setzen $U'(x, y) = U_0(x_0, y_0)$.

$U_0(x_0, y_0)$ stellt eine in K und auf C stetige Funktion von (x_0, y_0) dar, die am Rande die Werte

$$-\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x_1^0 - x_0)^2 + (y_1^0 - y_0)^2} + \log \varrho$$

annimmt. Im Innern von K , ausser vielleicht im Punkte (x_1^0, y_1^0) , erfüllt die Funktion $U_0(x_0, y_0)$ die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y_0^2} + a_0 \frac{\partial U_0}{\partial x_0} + b_0 \frac{\partial U_0}{\partial y_0} + c_0 U_0 &= \frac{a_0(x_0 - x_1^0) + b_0(y_0 - y_1^0)}{(x_0 - x_1^0)^2 + (y_0 - y_1^0)^2} + \\ (18) \quad &+ \frac{1}{2} c_0 \log [(x_0 - x_1^0)^2 + (y_0 - y_1^0)^2] + c_0 \log \varrho = \Phi_0(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Offenbar ist $U_0(x_0, y_0)$ eine Lösung der linearen Integralgleichung

$$\begin{aligned} U_0(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_K U_0(p, q) \left[a_0(p, q) \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial p} + b_0(p, q) \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial q} + \right. \\ (19) \quad &+ d_0(p, q) G(x_0, y_0; p, q) \Big] dp dq + \log \varrho + g(x_1^0, y_1^0; x_0, y_0) - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi_0(p, q) G(x_0, y_0; p, q) dp dq. \end{aligned}$$

Diese Integralgleichung ist der Integralgleichung (7) ganz analog. (Wir denken uns in jener Gleichung vorübergehend (x_0, y_0) für (x, y) gesetzt.) Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (19) nähern sich für $\varrho = 1$ den entsprechenden Gliedern der Gleichung (7) für alle (x_0, y_0) in K und auf C in gleichem Grade.

Nach einer endlichen Anzahl von Iterationen gehen die Integralgleichungen (7) und (19) entsprechend über in

$$(20) \quad U^*(x_0, y_0) + \iint_K f(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r^{2(1-\alpha)}} U^*(p, q) dp dq = \omega(x_0, y_0),$$

$$(21) \quad U_0(x_0, y_0) + \iint_K f_0(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r_0^{2(1-\alpha)}} U_0(p, q) dp dq = \omega_0(x_0, y_0).^1$$

Die Funktion $\omega_0(x_0, y_0)$ konvergiert bei verschwindendem $\delta = 1 - \varrho$ in allen Punkten in K und auf C in gleichem Grade gegen die Funktion $\omega(x_0, y_0)$. Die lösenden Kerne der beiden Integralgleichungen (20) und (21) haben entsprechend die Gestalt

$$\frac{1}{r^{2(1-\alpha)}} \Theta(x_0, y_0; p, q) \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_0^{2(1-\alpha)}} \Theta_0(x_0, y_0; p, q).$$

¹ Wir denken uns in der Gleichung (7): $U^*(x, y)$ für $\bar{U}(x, y)$ gesetzt.

Die Funktion $\Theta_0(x_0, y_0; p, q)$ konvergiert bei verschwindendem $\varrho = 1 - \delta$ für alle (x, y) und (p, q) in K und auf C in gleichem Grade gegen die Funktion $\Theta(x_0, y_0; p, q)$. Nun ist bekanntlich

$$(22) \quad U^*(x_0, y_0) = \omega(x_0, y_0) - \iint_K \Theta(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r_{xi}^{2(1-\alpha)}} \omega(p, q) dp dq$$

und

$$U_0(x_0, y_0) = \omega_0(x_0, y_0) - \iint_K \Theta_0(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r_{xi_0}^{2(1-\alpha)}} \omega_0(p, q) dp dq.$$

Hieraus folgt leicht, dass der absolute Betrag der Differenz

$$U^*(x_0, y_0) - U_0(x_0, y_0)$$

mit δ gleichmässig gegen Null konvergiert.

Hieraus und aus der Stetigkeit von $\gamma(x_1, y_1; x, y)$ ergibt sich, dass der Ausdruck

$$|U^*(\varrho x_0, \varrho y_0) - U_0(x_0, y_0)| = |U^*(x, y) - U^l(x, y)| = |\gamma(x_1, y_1; x, y) - \gamma'(x_1, y_1; x, y)|,$$

für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande jedes ganz im Innern von K enthaltenen Gebietes sich mit δ in gleichem Grade der Null nähert.¹

Auch unsere dritte Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

§ 3.

Kehren wir jetzt zu der Integralgleichung (7) zurück. Die Funktion $g(x_1, y_1; x, y)$ hat auf dem Rande des Gebietes K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$; das Integral $J = \iint_K \Phi(p, q) G(x, y; p, q) dp dq$ hat, ausser im Punkte $H = (i, j)$, dieselbe Eigenschaft. In der Nähe dieses Punktes ist

$$(24) \quad \left| \frac{\partial J}{\partial x} \right| < \theta_{24} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad \left| \frac{\partial J}{\partial y} \right| < \theta_{25} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}$$

¹ Vgl. die Fussnote auf d. S. 380.

² Diese Ungleichheitsbedingungen ergeben sich, wenn man die Integrale

$$\iint_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x} dp dq, \quad \iint_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y} dp dq$$

wie die Integralausdrücke in I § 2 abschätzt. Sie gelten für $\alpha < \frac{1}{2}$. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ erhält man die Beziehungen $\left| \frac{\partial J}{\partial x} \right| < \theta_{23} |\log r_{xi}|$, $\left| \frac{\partial J}{\partial y} \right| < \theta_{25} |\log r_{xi}|$.

Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so sind die partiellen Ableitungen (24) beschränkt.

Wir beweisen jetzt, dass auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ sich auf C , ausser im Punkte H , stetig verhalten. In der Nähe dieses Punktes ist

$$(25) \quad \left| \frac{\partial U^*}{\partial x} \right| < \theta_{26} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad \left| \frac{\partial U^*}{\partial y} \right| < \theta_{27} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}.$$

Zu diesem Ende betrachten wir die beiden simultanen Integralgleichungen

$$(26) \quad \begin{aligned} u_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x} [a(p, q) u_1(p, q) + b(p, q) u_2(p, q) + c(p, q) U^*(p, q)] dp dq - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x} dp dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}, \\ u_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y} [a(p, q) u_1(p, q) + b(p, q) u_2(p, q) + c(p, q) U^*(p, q)] dp dq - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Psi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y} dp dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht durch eine Wiederholung der im Kapitel I angewandten Schlüsse, dass diese Integralgleichungen durch eine endliche Anzahl von Iterationen der FREDHOLM'schen Methode zugänglich gemacht werden können. Wir bezeichnen mit $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ das System der Lösungen dieser Integralgleichungen, oder, falls sie nicht stets lösbar sein sollten, ein System der Lösungen der zugehörigen homogenen Integralgleichungen. Die Funktionen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ sind in K und auf C , ausser in (x_1, y_1) und in H , stetig; in der Nachbarschaft von H ist sicher

$$(27) \quad |u_1(x, y)| < \theta_{30} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad |u_2(x, y)| < \theta_{31} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}.$$

Wir setzen

$$(28) \quad \begin{aligned} V(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) [a(p, q) u_1(p, q) + b(p, q) u_2(p, q) + c(p, q) U^*(p, q)] dp dq - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) \Phi(p, q) dp dq + g(x_1, y_1; x, y). \end{aligned}$$

¹ Der im Text gegebene Beweis der Formeln (25) gilt nur, wenn $\alpha > \frac{1}{4}$, oder wenn $c = 0$.

Im letzteren Falle sind $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ in H beschränkt. Für $\alpha \leq \frac{1}{4}$, $c \neq 0$ würde, da $\psi_1(x_0, y_0)$ sich in H wie $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ verhält, die FREDHOLM'sche Theorie auf (36) nicht anwendbar sein.

Sind die Integralgleichungen (26) nicht stets lösbar, so ist für (28) zu setzen

$$(28^*) \quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) [a(p, q) u_1(p, q) + b(p, q) u_2(p, q)] dp dq.$$

Offenbar ist in beiden Fällen

$$(29) \quad u_1(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \quad u_2(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}.$$

Es ist nun zunächst leicht zu zeigen, dass die Integralgleichungen (26) stets lösbar sind. Andernfalls würde aus (28*) und (29) folgen

$$(30) \quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial V(p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial V(p, q)}{\partial q} \right] dp dq.$$

Hieraus würde man in bekannter Weise schliessen, dass

$$(31) \quad \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = -a(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - b(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}.$$

Da nun $V(x, y)$, wie aus (28*) folgt, auf C verschwindet, so würde nach bekannten Sätzen $V(x, y)$ in K und auf C identisch gleich Null sein.

Aus (28) und (29) folgt nunmehr die Beziehung

$$(32) \quad \begin{aligned} V(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial V(p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial V(p, q)}{\partial q} + c(p, q) U^*(p, q) \right] dp dq - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_K G(x, y; p, q) \Phi(p, q) dp dq + g(x_1, y_1; x, y). \end{aligned}$$

Hieraus wird in bekannter Weise geschlossen, dass

$$(33) \quad \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = -a(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - b(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} - c(x, y) U^*(x, y) + \Phi(x, y).$$

Wir setzen

$$V(x, y) - U^*(x, y) = W(x, y).$$

Aus (33) und (5) folgt

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = -a(x, y) \frac{\partial W}{\partial x} - b(x, y) \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Da nun die Funktion $W(x, y)$ auf C offenbar verschwindet, so ist sie in K und auf C identisch gleich Null. Wir finden somit

$$u_1(x, y) = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}, \quad u_2(x, y) = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y}.$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y}$ sind also in K und auf C , ausser in (x_1, y_1) und in dem Punkte H stetig, genügen in der Nachbarschaft von H den Ungleichheitsbedingungen (25) und erfüllen die beiden simultanen Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x} \left[a(p, q) \frac{\partial U^*}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial U^*}{\partial q} + c(p, q) U^*(p, q) \right] dp dq - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x} dp dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}, \end{aligned}$$

(34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y} \left[a(p, q) \frac{\partial U^*}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial U^*}{\partial q} + c(p, q) U^*(p, q) \right] dp dq - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y} dp dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Die Beziehungen (34) kann man, wenn man U^* als bekannt ansieht, als ein System linearer Integralgleichungen zur Bestimmung von $\frac{\partial U^*}{\partial x}$ und $\frac{\partial U^*}{\partial y}$ auffassen.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_0}{\partial x_0}, \frac{\partial U_0}{\partial y_0}$ erfüllen die beiden ganz analogen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial x_0} &= \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial x_0} \left[a_0(p, q) \frac{\partial U_0}{\partial p} + b_0(p, q) \frac{\partial U_0}{\partial q} + c_0(p, q) U_0(p, q) \right] dp dq - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi_0(p, q) \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial x_0} dp dq + \frac{\partial g(x_1^0, y_1^0; x_0, y_0)}{\partial x_0}, \end{aligned}$$

(35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial y_0} &= \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial y_0} \left[a_0(p, q) \frac{\partial U_0}{\partial p} + b_0(p, q) \frac{\partial U_0}{\partial q} + c_0(p, q) U_0(p, q) \right] dp dq - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_K \Phi_0(p, q) \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial y_0} dp dq + \frac{\partial g(x_1^0, y_1^0; x_0, y_0)}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

Der Gleichförmigkeit der Bezeichnung halber denken wir uns jetzt in den Gleichungen (34) vorübergehend x_0, y_0 für x, y gesetzt.

Wie schon Herr FREDHOLM bemerkt hätte, lässt sich ein System von n simultanen linearen Integralgleichungen mit n Unbekannten auf eine Integralgleichung mit einer Unbekannten zurückführen. Wir bezeichnen die den Systemen (34) und (35) äquivalenten Integralgleichungen mit F_1 und F_2 . Nach einer endlichen Anzahl von Iterationen gehen F_1 und F_2 entsprechend über in Integralgleichungen von der Form

$$(36) \quad \begin{aligned} \varphi_1(x_0, y_0) + \iint_K R_1(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r^{2(1-\alpha)}} \varphi_1(p, q) dp dq &= \psi_1(x_0, y_0), \\ \varphi_2(x_0, y_0) + \iint_K R_2(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r^{2(1-\alpha)}} \varphi_2(p, q) dp dq &= \psi_2(x_0, y_0),^1 \end{aligned}$$

worin R_1 und R_2 Funktionen bezeichnen, die in K und auf \bar{C} sich stetig verhalten.

Man beweist nunmehr wie in § 2 dieses Kapitels, dass

$$(37) \quad R_1 = \lim_{\delta=0} R_2.$$

Die Funktion R_2 nähert sich ihrem Grenzwerte für alle x_0, y_0 und p, q in \bar{K} und auf C in gleichem Grade.

Wir denken uns um den Punkt (x_1, y_1) in jeder der beiden Ebenen K einen kleinen Kreis vom Halbmesser $\delta_0 > 2\delta$ beschrieben. Das von diesen beiden Kreisen umschlossene Gebiet bezeichnen wir mit K_1 . Offenbar liegen die beiden Punkte (x_1^0, y_1^0) im Innern von K_1 . Wir beschreiben schliesslich in jeder der beiden Ebenen K einen Kreis vom Halbmesser δ_0 um den Punkt (i, j) . Das Gebiet, welches diese Kreise mit dem Gebiete K gemeinsam haben, sei mit K_2 bezeichnet. Es sei schliesslich ε eine beliebig kleine Grösse. Es lässt sich zeigen, dass man nach Festsetzung der Grösse δ_0 eine Zahl δ_2 so klein annehmen kann, dass für alle $\delta < \delta_2$ in allen Punkten von $\bar{K} - K_1 - K_2$

¹ Das Integrationsgebiet besteht nunmehr in bekannter Weise aus zwei übereinander gelagerten Einheitskreisen. Ist (x_0, y_0) ein Punkt in der ersten Kreisfläche, so ist $\varphi_1(x_0, y_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x_0}$, $\varphi_2(x_0, y_0) = \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}$; ist dagegen (x_0, y_0) derselbe Punkt in der anderen Kreisfläche, so ist $\varphi_1(x_0, y_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y_0}$, $\varphi_2(x_0, y_0) = \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}$. Die Begrenzung von K bezeichnen wir mit C .

$$(38) \quad |\psi_1(x_0, y_0) - \psi_2(x_0, y_0)| < \epsilon$$

wird. Hieraus und aus (37) folgt weiter, dass man eine Zahl δ_3 so klein wählen kann, dass für alle $\delta < \delta_3$ in $K - K_1 - K_2$

$$(39) \quad |\varphi_1(x_0, y_0) - \varphi_2(x_0, y_0)| < \epsilon$$

wird. Dies bedeutet nun aber folgendes: In allen Punkten im Innern und auf dem Rande jedes die Punkte (x_1, y_1) und (i, j) nicht enthaltenden Teilgebietes K^* von K nähern sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_0}{\partial x_0}, \frac{\partial U_0}{\partial y_0}$ mit verschwindendem δ gleichmässig den Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*}{\partial x_0}, \frac{\partial U^*}{\partial y_0}$ an. Hieraus folgt nun aber ohne Mühe, dass in allen Punkten im Innern und auf dem Rande jedes den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden, ganz im Innern von K gelegenen Gebietes

$$\lim_{\varrho=1} \frac{\partial U^1(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{\varrho=1} \frac{\partial U^1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y},$$

wofür wir auch schreiben können

$$(40) \quad \begin{cases} \lim_{\varrho=1} \frac{\partial \gamma^1(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\varrho=1} \frac{\partial \gamma^1(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}. \end{cases}$$

Wir fassen jetzt die Ergebnisse dieses und des vorhergehenden Paragraphen in dem folgenden Satze zusammen:

Es sei ϱ_0 ein positiver echter Bruch. Es sei C' ein Kreis um den Koordinatenursprung in der Ebene (x, y) , dessen Halbmesser der Ungleichheitsbedingung $\varrho_0 \leq \varrho < 1$ genügt. Das von ihm begrenzte Gebiet bezeichnen wir mit K' . Es sei C der Einheitskreis, K seine Fläche. Es sei ferner (x_1, y_1) irgendein Punkt, dessen Entfernung von dem Koordinatenursprung kleiner ist als ϱ_0 .

Wir gingen von der Voraussetzung aus, dass die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'sche Funktion

$$(41) \quad U(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \gamma(x_1, y_1; x, y)$$

¹ Vgl. die Fussnote a. d. S. 380.

existiert. Als dann haben wir in § 2 bewiesen, dass für alle hinreichend kleinen Werte von $1 - \rho$ die zu dem Gebiete K' gehörige GREEN'sche Funktion

$$(42) \quad I'(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{2} \log (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + \gamma'(x_1, y_1; x, y)$$

existiert und dass in allen Punkten (x, y) in K

$$(43) \quad \lim_{\rho=1} \gamma'(x_1, y_1; x, y) = \gamma(x_1, y_1; x, y).$$

Die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$ nähert sich ihrem Grenzwerte in jedem den Umfang nicht enthaltenden Teilgebiete von K in gleichem Grade. Die Funktion $\gamma(x_1, y_1; x, y)$ hat in allen Punkten (x, y) in K und auf C , die Punkte (x_1, y_1) und (i, j) ausgenommen, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Desgleichen hat die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$ in K' und auf C' , ausser im Punkte (x_1, y_1) , stetige Ableitungen erster Ordnung.

Es sei K^* irgendein den Punkt (x_1, y_1) und die Randkurve C nicht enthaltendes Teilgebiet von K . Es ist in allen Punkten (x, y) in K^*

$$(44) \quad \begin{cases} \lim_{\rho=1} \frac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}, \\ \lim_{\rho=1} \frac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}. \end{cases}$$

Die Funktionen hinter dem Limeszeichen in (44) nähern sich ihren Grenzwerten in K^* in gleichem Grade.¹

Aus den Beziehungen (44) können wir noch eine weitere Folgerung ziehen. Es sei C_1 irgendein kleiner, den Punkt (i, j) in seinem Inneren enthaltender Bogen von C . Die Endpunkte von C_1 denken wir uns mit dem Kreismittelpunkt durch Radien verbunden. Derjenige Teil von C' , der innerhalb des so gebildeten Kreissektors liegt, möge C'_1 heissen. Wir denken uns vorübergehend diejenigen Punkte von $C - C_1$ und $C' - C'_1$, die auf demselben Radius liegen, einander zugeordnet. Es sei (ξ, η) und (ξ', η') ein Paar zugeordneter Punkte. Als dann ist

$$(45) \quad \begin{aligned} \lim_{\rho=1} \left\{ \frac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} \right\}_{\substack{x=\xi' \\ y=\eta'}} &= \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}}, \\ \lim_{\rho=1} \left\{ \frac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} \right\}_{\substack{x=\xi' \\ y=\eta'}} &= \frac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{x=\xi \\ y=\eta}}. \end{aligned}$$

¹ In den zu (43) und (44) gehörigen Aussagen werden beliebige, die Kurve C nicht enthaltende Teilgebiete von K eingeführt, weil die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$, $\rho < 1$ für die Punkte (x, y) von C nicht definiert ist.

Die Ausdrücke $\left. \frac{\partial \gamma^j(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=z' \\ y=y'}}$ und $\left. \frac{\partial \gamma^j(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=z' \\ y=y'}}$ nähern sich mit verschwindendem δ ihren Grenzwerten für alle (ξ, η) auf $C - C_1$ in gleichem Grade.

§ 4.

Wir nehmen jetzt zur Vereinfachung an, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}, \frac{\partial B}{\partial X}, \frac{\partial B}{\partial Y}$ im Innern des Gebietes T der HÖLDER'schen Bedingung genügen.

Die Funktionen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, d$ haben alsdann im Innern des Kreises K dieselbe Eigenschaft.

Es sei

$$(46) \quad M(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial (au)}{\partial x} - \frac{\partial (bu)}{\partial y} + cu - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - du = 0$$

die zu (3) adjungierte Differentialgleichung. Wir haben in diesem Kapitel vorausgesetzt, dass die partielle Differentialgleichung (3) keine von Null verschiedene, in K mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige, am Rande verschwindende Lösung hat. Die Differentialgleichung (46) hat dieselbe Eigenschaft. Hiervon kann man sich, wie folgt, leicht überzeugen.

Es sei, entgegen unserer Behauptung, $v_0(x, y)$ eine am Rande von K verschwindende, im Innern mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige Lösung von (46). Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}$ sind, wie durch eine den Betrachtungen des § 3 ganz analoge Untersuchung gezeigt werden kann, ausser in dem Punkte $H = (i, j)$, auf dem Rande des Gebietes stetig. In der Umgebung des Punktes H ist

$$(47) \quad \left| \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right| < \gamma r_{xi}^{2\alpha-1},$$

$$\left| \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \right| < \gamma r_{xi}^{2\alpha-1},$$

worin γ eine gewisse positive Grösse bezeichnet.

Setzen wir nunmehr in der GREEN'schen Formel

$$(48) \quad \int_K [wL(t) - tM(w)] dx dy = \int_C \left[w \frac{\partial t}{\partial x} - t \frac{\partial w}{\partial x} + atw \right] dy - \int_C \left[w \frac{\partial t}{\partial y} - t \frac{\partial w}{\partial y} + btw \right] dx,$$

für $t(x, y)$ und $w(x, y)$ entsprechend $U(x_1, y_1; x, y)$ und $v_0(x, y)$ ein, so erhalten wir

$$v_0(x_1, y_1) = 0.$$

Es sei jetzt $H(x_1, y_1; x, y)$ die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (46), $u(x, y)$ diejenige beschränkte Lösung der Differentialgleichung (2), welche sich mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung in K stetig verhält und auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Folge von Werten annimmt. Wir beweisen nunmehr die *Fundamentalformel*

$$(49) \quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(x, y) \frac{\partial H(x_1, y_1; x, y)}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \int_K f(p, q) H(x_1, y_1; p, q) dp dq.$$

Hierin bezeichnen: (x, y) einen variablen Punkt auf C , ds das Bogenelement, $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte (x, y) .

Sind die auf dem Umfange von K vorgeschriebenen Randwerte stetig und haben sie in bezug auf die Bogenlänge stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so bietet der Beweis der Formel (49) keine Schwierigkeiten. In der Tat, ist durch die vorhergehenden Entwicklungen die Existenz der Lösung $u(x, y)$ sichergestellt. Es lässt sich ferner durch eine den Untersuchungen des § 3 ganz analoge Betrachtung zeigen, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ sich auf C , ausser in dem Punkte $H = (i, j)$, stetig verhalten, während in der Umgebung dieses Punktes gewisse den Beziehungen (47) analoge Ungleichheitsbedingungen erfüllt sind. Es genügt nunmehr in der GREEN'schen Formel (48) für $t(x, y)$ und $w(x, y)$ entsprechend $u(x, y)$ und $H(x_1, y_1; x, y)$ einzusetzen, um die Formel (49) abzuleiten.²

In dem allgemeinen Falle ist indessen dieser einfache Weg nicht gangbar, da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ auf dem Rande im allgemeinen nicht existieren. Um die Formel (49) dennoch zu beweisen, muss ein anderes

¹ Vgl. SOMMERFELD, Encyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd II, A 7 c, S. 513. Man überzeugt sich leicht, dass die Formel (48) im vorliegenden Falle ihre Gültigkeit behält.

² Vgl. SOMMERFELD, Encyklopädie d. Math. Wiss., Bd II, A 7 c, S. 516.

Verfahren eingeschlagen werden. Die Hilfsmittel hierzu bieten uns die Sätze, die wir in den vorhergehenden Paragraphen abgeleitet haben.

Wie wir in § 2 dieses Kapitels bewiesen haben, gibt es eine positive Zahl δ_1 , so dass für alle positiven $\delta \leq \delta_1$ die Differentialgleichung (3) keine von Null verschiedene, im Innern von K' mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, auf C' verschwindende Lösung hat. Es sei $H'(x_1, y_1; x, y)$ die zu dem Gebiete K' gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (46). Die Funktion $u(x, y)$ ist im Innern und auf dem Rande von K' mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Daher ist für alle (x_1, y_1) im Innern von K'

$$(50) \quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} ds' - \frac{1}{2\pi} \iint_{K'} f(p, q) H'(x_1, y_1; p, q) dp dq.$$

Hierin bezeichnen: (x'_0, y'_0) einen variablen Punkt auf C' , ds' das Bogenelement, $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Ableitung in der Richtung der Normale im Punkte (x'_0, y'_0) . Es mögen jetzt C_1, C'_1 dieselbe Bedeutung wie am Ende des § 4 haben. Die Länge des Bogens C_1 bezeichnen wir mit ν . Wir bezeichnen ferner mit (x_0, y_0) denjenigen Punkt von C , der mit dem Punkte (x'_0, y'_0) auf demselben Radius liegt. Es sei schliesslich ε eine beliebig kleine positive Zahl.

Wie aus unseren früheren Betrachtungen hervorgeht, ist

$$u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'}$$

eine für alle $\delta \leq \delta_1$ und alle (x_0, y_0) auf $C - C_1$ beschränkte Funktion von x'_0, y'_0, δ . Abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten ist überdies, wie aus den Formeln (41), (42) und (45) hervorgeht,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} = u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n}.$$

Nach bekannten Sätzen ist, da der Grenzübergang gleichmässig ist,

$$(51) \quad \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ C' \rightarrow C_1}} \int_{C'} u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} ds' = \int_{C' \rightarrow C_1} u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n} ds.$$

Man kann nun ferner, wie aus den Beziehungen (25) folgt, ν so klein wählen, dass für alle $\delta \leq \delta_1$ die über C_1 und C'_1 erstreckten Integrale

$$\int_{C_1} u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n} ds, \int_{C_1} u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} ds'$$

dem absoluten Betrage nach kleiner werden als ε . Hieraus und aus den Beziehungen (50) und (51) folgt, wie behauptet,

$$(52) \quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint_K f(p, q) H(x_1, y_1; p, q) dp dq.$$

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass $\frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}, \frac{\partial B}{\partial X}, \frac{\partial B}{\partial Y}$ im Innern von T der HÖLDER'schen Bedingung genügen. Diese Voraussetzung lassen wir nunmehr fallen: $\frac{\partial A}{\partial X}, \dots, \frac{\partial B}{\partial Y}$ sollen schlechthin stetige Funktionen von X und Y sein. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ sind alsdann in K schlechthin stetige Funktionen von x und y . Alle unsere Schlüsse bleiben, wie wir jetzt zeigen wollen, bestehen, wenn wir $M(u)$ durch den Ausdruck

$$(53) \quad M(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] -$$

$$a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - du$$

ersetzen.

Betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung

$$(54) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

und nehmen wir vorübergehend an, c und f seien schlechthin stetige Funktionen und erfüllen in K nicht mehr die HÖLDER'sche oder eine verwandte Bedingung. Wir können alsdann aus der Gleichung (26) des I Kapitels nicht mehr schliessen, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existieren und dass die Differentialgleichung (54) erfüllt ist.

Es sei $r(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y . Wie Herr PETRINI bewiesen hat,¹ erfüllt das Integral

¹ Vgl. H. PETRINI, Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique, Journal de Mathématiques, 1909, [S. 127—223], S. 133.

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_K r(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

die Beziehung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \omega(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \right] = r(x, y).$$

Der hinter dem Limeszeichen stehende Ausdruck linkerhand nähert sich seinem Grenzwerte für alle (x, y) in K in gleichem Grade. Aus der Gleichung (58) des ersten Kapitels ergibt sich daher die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] + \\ + a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y) u(x, y) = f(x, y). \end{aligned}$$

Die Funktion $h(x_1, y_1; x, y) = H(x_1, y_1; x, y) + \frac{1}{2} \log[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]$, die einer zu (7) analogen Integralgleichung genügt, hat nun im vorliegenden Falle in jedem (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teilgebiete von K stetige Ableitungen erster Ordnung und erfüllt daselbst die Beziehung $M(u) = 0$. Der Ausdruck hinter dem Limeszeichen nähert sich seinem Grenzwerte in gleichem Grade.

Man überzeugt sich nunmehr ohne Mühe, dass die GREEN'sche Formel (48) gültig bleibt, wenn man für $M(w)$ den Ausdruck $M(u)$ einsetzt. Da nun offenbar auch die grundlegenden Hilfsätze in §§ 2 und 3 ihre Gültigkeit behalten, so haben wir an unseren Schlüssen nichts mehr zu ändern. Wir erhalten wieder die Formel (52). Das einzige, was wir uns zu merken haben, ist, dass $H(x_1, y_1; x, y)$ nicht mehr die Gleichung (46), sondern die Gleichung $M(u) = 0$ erfüllt.

Gehen wir jetzt von dem Gebiete K vermittelt der Transformation

$$(55) \quad X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

zu dem ursprünglichen, mit Ecken ausgestatteten Gebiete T zurück. Die Differentialgleichung (2) geht über in die ursprüngliche Differentialgleichung

$$(56) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A \frac{\partial U}{\partial X} + B \frac{\partial U}{\partial Y} + C U = F,$$

die Gleichung (46) in die zu (56) adjungierte Differentialgleichung

$$(57) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial}{\partial X} (A U) - \frac{\partial}{\partial Y} (B U) + C U = 0$$

über. Die Funktion

$$(58) \quad H(X_1, Y_1; X, Y) = H(x_1, y_1; x, y)$$

ist, wie man sofort sieht, die zu dem Gebiete T gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (57). Die Gleichung (52) geht über in

$$(59) \quad U(X_1, Y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} U(X_0, Y_0) \frac{\partial H(X_1, Y_1; X_0, Y_0)}{\partial n} ds - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_T F(P, Q) \bar{H}(X_1, Y_1; P, Q) dP dQ.$$

Wir haben zur Vereinfachung in diesem Kapitel das Gebiet T einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Die Zahl der Ecken haben wir gleich eins angenommen. Die Formel (59) gilt unverändert bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten mit einer endlichen Anzahl von Ecken. Der Beweis wäre analog zu führen.

Berlin, d. 19. Dezember 1910.

Nachtrag.

In einer in Veröffentlichung begriffenen grösseren Arbeit¹ habe ich die erste Randwertaufgabe noch einmal nach einem von dem obigen abweichenden Verfahren behandelt. An jener Stelle wird das erste Randwertproblem unter anderem für alle Gebiete erledigt, deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente besteht, die beliebige Ecken oder *Spitzen* miteinander einschliessen. Die Randwerte werden als abteilungsweise stetig vorausgesetzt.

Berlin, d. 17 Oktober 1912.

¹ Vgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1913, Heft I, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete.

BIBLIOGRAPHIE.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig 1912.

WIEN, W., Über die Gesetze der Wärmestrahlung. Nobel-Vortrag, gehalten am 11. Dez. 1911 in Stockholm. — 21 pp. 8. M. 1:—.

Cambridge University Press.

London 1912.

FORSYTH, A. R., Lectures on the differential geometry of curves and surfaces. — XXIV + 526 pp. 8. 21 sh.

Curves in space. General theory of surfaces. Organic curves of a surface. Lines of curvature. Geodesics. General curves on a surface; differential invariants. Comparison of surfaces. Minimal surfaces. Surfaces with plane or spherical lines of curvature; Weingarten surfaces. Deformation of surfaces. Triply orthogonal systems of surfaces. Congruences of curves. Miscellaneous examples.

WHITEHEAD, ALFRED NORTH, & RUSSELL, BERTRAND, Principia Mathematica. Vol. 2. — XXXIV + 772 pp. 8. 30 sh.

Prefatory statement of symbolic conventions. Part 3: Cardinal arithmetic: Definition and logical properties of cardinal numbers. Addition, multiplication and exponentiation. Finite and infinite. — Part 4: Relation-arithmetic: Ordinal similarity and relation-numbers. Addition of relations, and the product of two relations. The principle of first differencés and the multiplication and exponentiation of relations. Arithmetic of relation-numbers. — Part 5: Series: General theory of series. On sections, segments and derivatives. On convergence, and the limits of functions.

Eggers & Co.

S:t Petersburg 1912.

HAASE, A., Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene. Kursus der VII. Klasse der Realschulen. — 81 pp. 8. 1 Rbl. geb.

Acta mathematica. 36. Imprimé le 11 novembre 1912.

NATHING, A., Lehrbuch der Stereometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearb. 2:e unveränd. Aufl. — 91 pp. 8. 1 Rbl. geb.

Grundbegriffe. Von den Geraden u. Ebenen in Verbindung mit einander. Das Prisma. Die Pyramide. Kongruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit der Polyeder. Reguläre Polyeder. Der Cylinder. Der Kegel. Die Kugel.

R. Friedländer & Sohn.

Berlin 1911.

RICHTENFELS, JOHANNES, Allgemeiner Beweis des Fermatschen Lehrsatzes: »Während die Summe zweier Quadrat-Zahlen sehr wohl wieder eine Quadrat-Zahl geben kann, giebt die Summe zweier Kuben, nie wieder einen Kubus, die Summe zweier Biquadrate nie wieder ein Biquadrat, u. s. f. für alle höheren Potenzen,» und Erweiterung desselben auf Bruch-Potenzen. Erste Aufl. — 15 pp. 8. M. 1:—

RICHTENFELS, JOHANNES, Mehrere allgemeine Beweise für den sogenannten »grossen« oder »letzten« Fermatschen Lehrsatz, bewiesen für alle beliebigen Exponenten n ; nach welchen seit ca. 200 Jahren gesucht, und deren bisher nicht einer gefunden worden sein soll. (Nebst einem Anhang: Auflösung der transzendenten Gleichung $x^x = a$). Kritische Beiträge zur Theorie der Irrational-Zahlen. Zweite Aufl. (Erweit. der ersten Aufl.) — 42 pp. 8. M. 2:50.

Gauthier-Villars.

Paris 1911—1912.

APPELL, PAUL, Traité de mécanique rationnelle. 3:e éd., ent. refond. T. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. — 559 pp. 8.

Moments d'inertie. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes. Les sept équations univers. du mouvement. Dynamique du corps solide. Mouvements parallèles à un plan. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Corps solide libre. Mouvement relatif. Principe de d'Alembert. Équations générales de la dynamique analyt. Equat. canoniques. Théorèmes de Jacobi et de Poisson. Principes d'Hamilton, de la moindre action et de la moindre contrainte. Chocs et percussions. Notions sur les machines. Similitude.

BACHELIER, LOUIS, Calcul des probabilités. T. 1. — VII + 518 pp. 4. Fr. 25:—

Préface. Notions générales sur les probabilités. Théorie élémentaire des épreuves répétées. Questions diverses. Second problème de la théorie du jeu. Troisième problème de la théorie du jeu. Probab. continues uniformes. Théorie d. épreuves répétées uniformes. Probab. continues non uniformes. Probab. connexes. Probab. continues du

sec. genre. Probab. continues du troisième genre. Théorie mathématique de la spéculation. Étude des opérations de spéculation. Théorie de la spéculation. Probab. du deuxième genre. Probab. du troisième genre. Théorie du rayonnement de la probabilité. Probab. continues à deux variables. Probab. cont. à plusieurs variables. Probabilités géométriques. Probab. cinématiques. Probab. dynamiques. Probab. inverses. Probab. des causes.

GAUTIER, D., Mesure des angles. Hyperboles étoilées et développante. — IV + 84 pp. 8. Fr. 2: —.

Exposé de la question. Étude géométrique de l'hyperbole étoilée. Hyperbole développante. Étude algébrique des courbes. Résumé et conclusion.

GOURSAT, ÉDOUARD, Cours d'analyse mathématique. 2:e éd., entièrem. refond. T. 1, 2. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) — VI + 645 pp. 8.

T. 1. Introduction. Limites. Ensembles. Fonctions. Généralités. — Dérivées et différentielles: Définitions. Propriétés générales. Notation différentielle. Fonct. déf. par des séries. — Fonctions implicites. Points singuliers. Maxima et minima. Déterminants fonctionnels. Changements de variables. — Méthodes diverses de quadrature. Intégrales définies. Notions géom. qui s'y rattachent. Changements de variables. Intégration par parties. Extensions diverses de la notion d'intégrale. Intégrales curvilignes. Différentiation et intégration sous le signe \int . — Calcul des intégr. définies. Calcul approché des intégr. déf. Méthodes diverses. — Intégrales doubles. Changement de variables. Volumes. Aire d'une surface courbe. Extens. de la notion d'intégr. double. Intégr. de surface. — Intégr. multiples. Intégration des différentielles totales. — Règles de convergence. Séries à termes imaginaires. Séries multiples. Produits infinis. — Série de Taylor. Généralités. Séries entières à une variable. Séries ent. à plusieurs variables. Fonctions implicites. Courbes et surfaces analyt. Séries trigonométriques. Séries de polynomes. — Courbes et surfaces enveloppes. Contact de deux courbes, d'une courbe et d'une surface. — Plan osculateur. Courbure et torsion. Développées. — Courbure des courbes tracées sur une surface. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure. Notions sur les systèmes de droites.

T. 2. Généralités. Fonct. monogènes. Séries ent. à termes imag. Transcendantes élémentaires. Notions sur la représent. conforme. — Intégr. déf. prises entre des limites imag. Intégr. de Cauchy. Séries de Taylor et de Laurent. Points singuliers. Résidus. Applicat. des théorèmes généraux. Périodes des intégr. déf. — Facteurs primaires de Weierstrass. Théorème de Mittag-Leffler. Fonct. doubl. périodiques. Fonct. ellipt. Inversion. Courbes du prem. genre. — Définition d'une fonct. analyt. par un de ses éléments. Espaces lacunaires. Coupures. — Propriétés génér. Fonct. implicites. Fonct. algèbr. — Formation d. équat. différent. Équat. du prem. ordre. Équat. d'ordre sup. — Théorèmes d'existence. Equations différent. lin. — Équat. différent. non lin. — Équat. aux dérivées part. du prem. ordre. —

HALSTED, GEORGE BRUCE, Géométrie rationnelle. Traité élémentaire de la science de l'espace. Trad. franç. par Paul Barbarin. Avec une préface de C. A. Laisant. — IV + 296 pp. 8. Fr. 6:50 broché; Fr. 7:50 cart.

Association. Ordre. Congruence. Parallèles. Problèmes de construction. Côtés et angles. Calcul segmentaire. Proportions et similitude. Équivalence. Le cercle. Longueur et superficie du cercle. Géométrie des plans. Polyèdres et volumes. Sphériques à trois dimensions. Cône et cylindre. Sphérique pure. Angles polyèdres ou angloïdes. Appendice 1—3.

LEBON, ERNEST, Gabriel Lippmann, biographie, bibliographie analytique des écrits. (Savants du jour). VIII + 70 pp. 8. Fr. 7:—.

Biographie. Physique mathématique. Physique expérimentale. Astronomie physique. Publications diverses.

STOFFAËS, E., Cours de mathématiques supérieures, à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques. 3:me éd., entièrement refondue. T. 1. X + 398. pp. 8. Fr. 10:—; T. 2. V + 362 pp. 8. Fr. 10:—.

T. 1. Compléments d'algèbre élémentaire. Dérivées. Généralités sur les équations. Premières notions de géométrie analytique plane. Prem. notions de géom. analyt. à trois dimensions. Différentielles et intégrales.

T. 2. Courbes et surfaces: Courbes du second degré. Centres diamètres et axes. Foyers et directrices. Tangentes. Courbes enveloppes. Courbure d. lignes planes. Développées. Asymptotes. Points singuliers. Construction d. courbes. Détermination d. courbes du sec. degré. Tangente et plan normal. Surfaces enveloppes. Génération d. surfaces. Courbure d. courbes gauches et courb. d. surfaces. Applications géométr. du calcul intégral aux courbes et aux surfaces. Différentiation sous le signe \int . — Équations différentielles: Définition et formation d. équations différentielles. Équat. diff. du premier ordre et du prem. degré. Équat. diff. d. prem. ordre et d'un degré supérieur au premier. Équat. diff. du sec. ordre. Équat. diff. simultanées. Équat. aux dérivées partielles.

TANNERY, PAUL, Mémoires scientifiques, publ. par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen, avec 17 fig. et un portrait. t. 1. — XIX + 466 pp. 8. Fr. 15:—.

Note sur le système astronomique d'Eudoxe. Le nombre nuptial de Platon. L'hypothèse géométrique de Ménon de Platon. Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules. Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe. A quelle époque vivait Diophante? L'article de Suidas sur Hypatia. L'arithmétique des Grecs dans Pappus. Sur l'âge du pythagoricien Thymaridas. L'article de Suidas sur le philosophe Isidore. Sur le problème des boeufs d'Archimède. Quelques fragments d'Appolonius de Perge. Les mesures des marbres et des divers bois de Didyme d'Alexandrie. Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus. Sur les fragments de Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques. Sur Sporos de Nicée. Sur l'invention de la preuve par neuf. L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie. Sur la mesure du cercle d'Archimède. De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide. Un fragment de Speusippe. Sérénus d'Antissa. Sur

une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède. Seconde note sur le système astronomique d'Eudoxe. Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules. Aristarque de Samos. Stéréométrie de Héron d'Alexandrie. Etudes héroniennes. Sur le »modius castrensis«.

Georg & Cie.

Basel & Genf 1912.

HÆGAARD, POUL, Der Mathematikunterricht in Dänemark. (Internat. Mathematische Unterrichtskommission.) — 107 pp. 8.

Die Schultypen. Elementarschulen. Die höh. allgemeinen Schulen. Die Volkshochschule. Elementarschulen für Technik, Handel und Seefahrt. Militärschulen. Schulen für Land-, Forstwirtschaft usw. Die Kunstakademie. Die Universität und die technische Hochschule. Die Lehrerausbildung.

G. J. Göschen.

Leipzig 1907—1912.

BEUTEL, EUGEN, Algebraische Kurven. 2: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. (Samml. Göschen 436.) — 136 pp. 8. M. 0:80 geb.

Polare und Hessesche Kurve. Das Dualitätsprinzip in der analytischen Geometrie der Ebene. Höhere Singularitäten. Kurven dritter Ordnung. Kurven vierter Ordnung.

BÜRKLEN, O. TH., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. 2:te, verb. Aufl. Samml. Göschen No 256. — 175 pp. 8. 80 Pf.

Punkte und Strecken. Die gerade Linie. Der Kreis. Die Parabel. Die Ellipse. Die Hyperbel. Die Kegelschnitte im allgemeinen. Polarkoordinaten. Aufgaben über höhere Kurven.

KOMMERELL, V., und KOMMERELL, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. 1. Bd. 2:e Aufl. (Samml. Schubert XXIX.) — 172 pp. 8. M. 4:80 geb.

Die Raumkurven: Gleichungen der Raumkurve. Die Schraubenlinie des Kreiszylinders. Bogenelement, Tangente u. Normalebene einer Raumkurve. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, sphär. Abbild. der Raumkurve. Das die Raumkurve begleitet. Dreikant. Krümmungsmittelpunkt. Torsion od. zweite Krümmung. Die Formeln von Frenet. Schmiegungskugel. Anwend. auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders. Die natürl. Gleichungen einer Raumkurve. Herleit. einer Kurve aus gegeb. Eigenschaften. Raumkurven u. abwickelbare Flächen. Abwickelb. Flächen, erzeugt durch die Ebenen des begleit. Dreikants. Evoluten u. Evolventen. Minimalgeraden, Minimalkurven. Übungsaufgaben zu Abschnitt I. — Untersuchung einer Fläche in der ersten Form $F(x, y, z) = 0$. Linien-

u. Flächenelement, Tangentialebene, Normale. Das Schmiegungsparaboloid. Indikatrix. Hauptkrümmungsrichtungen. Asymptotenrichtungen, konjugierte Richtungen. Hauptkrümmungsradien; die Sätze von Euler u. Meusnier. Geom. Betrachtungen u. Definitionen. Sphär. Abbild. einer Fläche. Formeln f. die Richtungskosinus d. Normalen. Allgem. Formeln f. konjug. Richtungen, Krümmungslinien u. Asymptotenlinien. Allgem. Formeln f. die Hauptkrümmungsradien. Krümmungsmass. Kreispunkte. Konfokale Flächen zweiter Ordn. Ellipt. Koordinaten. Krümmungslinien d. konfokalen Flächen zweiter Ordn. Satz von Dupin. Geodätische Linien. Anwend. auf Rotationsflächen. Die geodät. Linien der Mittelpunktsflächen zweiter Ordn. Die allgem. Flächenkurve. Übungsaufgaben zu Abschnitt II.

LOEWY, ALFRED, Versicherungsmathematik. 2:e umgearb. Aufl. (Samml. Göschel 180). — 175 pp. 8. M. 0:80 geb.

Einleitung. Zins. Sterblichkeitstafeln. Einmalige Nettoprämien für die Versicherung auf das Leben einer Person. Jährl., gleichbleib. Prämienzahlung. Die Praxis. Deckungskapital od. Prämienreserve. Die Bilanz. Versicherung auf verbundene Leben. Selektionssterbetafeln. Anhang.

ROSE, MAX, Einleitung in die Funktionentheorie. (Theorie der komplexen Zahlenreihen). Samml. Göschel No 581. — 139 pp. 8. 80 Pf.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Reihen mit komplexen Gliedern, im besonderen Potenzreihen. Spezielle Potenzreihen. Konforme Abbildung.

SCHUBERT HERMANN, Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Grosse Ausgabe. Dritte Aufl. Erster Band: Zahl-Probleme. — VIII + 200 pp. 8. M. 4:— geb.

Erraten gedachter Zahlen. Vorauswissen erhaltener Resultate. Merkwürdige Ziffernfolgen. Über sehr grosse Zahlen. Erraten d. Augensumme verdeckt liegender Karten. Umfüllungs-Aufgaben. Neuner-Probe u. Neuner-Kunststück. Dominoketten. Darstellung aller Zahlen als Summen von Potenzen von Zwei. Das Bachetsche Gewichtsproblem. Erraten von Besitzern verschiedener Sachen. Spiel von zwei Personen, die abwechselnd addieren. Vollkommene Zahlen. Pythagoreische u. Heronische Zahlen. Erschwerte Teilung. Arithmet. Trugschlüsse. Diophantische Gleichungen. Primzahlen u. Teilbarkeitsregeln. Zerlegung einer Zahl in die Summe von zwei od. mehr Quadraten. Abgekürzte Zählungen. Wurzel-Auszichung im Kopfe. Einmalige Verwend. jeder Ziffer, um eine bestimmte Zahl darzustellen. Bezahlungs-Möglichkeiten.

SPORER, BENEDIKT, Niedere Analysis. 2:e verb. Aufl. (Samml. Göschel 53). — 179 pp. 8. M. 0:80 geb.

Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen. Kombinationslehre: Permutationen. Kombinationen u. Variationen. Determinanten. — Arithmet. Reihen höherer Ordnung. Figurierte Zahlen. Interpolation. — Summierbare Reihen. Konvergenz u. Divergenz

Bibliographie.

unendlicher Reihen. Die Methode der unbest. Koeffizienten. Umkehrung von Reihen. Die binom. Reihe. Die Exponentialreihe. Die logarithm. Reihe. Logarithmen. Die trigonometr. Funktionen. Imaginäre Logarithmen. Die cyklometr. Funktionen. Die Berechnung der Zahl π . Unendl. Produkte. — Allgem. Eigenschaften der algebr. Gleichungen mit einer Unbekannten. Eigenschaften d. Koeffizienten einer Gleichung. Auflös. der Gleichung höheren Grades. Näherungsweise Aufl. der Gleichungen.

STURM, AMBROS, Geschichte der Mathematik bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts. 2te, verb. Aufl. Samml. Götschen No 226. — 148 pp. 8. 80 Pf.

Altertum: Ägypter und Mesopotamer. Griechen, a) Voreuklidische Zeit, b) Blüteperiode, c) Nachklassische Periode. Römer. Ind. — Mittelalter: Araber. Die Zeit der Abazisten und Algorithmiker. Die Zeit des Wiedererwachsens der Math. in Europa. Die Zeit d. Aufschwunges der Math. in Deutschland. — Neuzeit: Die Zeit d. Aufschwunges d. Algebra. XVII. Jahrhundert. XVIII. Jahrhundert.

Gyldendalske Boghandel Nordisk Forlag.

Köbenhavn & Kristiania 1912.

NIELSEN, NIELS, Beretning om den anden Skandinaviske Matematikerkongres i Kjøbenhavn 1911. — XVI + 192 pp. 8. Kr. 6:—

Kongressens Bestyrelse og Præsidium. Deltagerne i Kongr. Kongressens Program. Indledningstale ved Aabningsmødet. Telegr. — Præcisionsmathematikens Tilbliven fra Pythagoras til Euklid., af H. G. ZEUTHEN. Om analytiske funktioners udvikling i række efter hypergeometriske funktioner, af NIELS NIELSEN. Om integralekvationernes betydelse for hydrodynamiken, af C. W. OSEEN. Grafisk algebra og grafisk differential- og integralregning, af V. BJERKNES. En sætning om den lineære homogene Differentialligning af anden Orden, hvis Koefficienter ere anden Grads Polynomier, af O. A. SMITH. Undersøgelser over Ligningernes Theori, af J. L. W. V. JENSEN. Nye Undersøgelser over Geometriens Grundlag, af J. HJEMSLEV. Et Problem i Analysis situs, af POUL HEEGAARD. Om ändligt mångtydiga integraler till algebraiska differentialekvationer af första ordningen, af J. MALMQUIST. Om Identiteten af den Fredholmske Determinant og en uendelig, v. Koch'sk Determinant, af JOHANNES MÖLLERUP. Den analytiska lösningen af banbestämningsproblemet, af C. V. L. CHARLIER. Om algebraiske og ikke-algebraiske Flader, af C. JUEL. Om telegrafistekvationen, af H. PLEIJEL. Om de Værdier, den Riemann'ske Funktion $\zeta(\sigma + it)$ antager i Halvplanet $\sigma > 1$, af HARALD BOHR. Ett axiom-system för den euklidiska geometrien, af T. BRÖDÉN. Nogle Klasser af harmoniske Funktioner med tre Variable, af E. SCHOU. Kraftfelt-fænomener i kontinuerlige materielle medier, af V. BJERKNES. Om en af den danske sprogforskeren Karl Werner angifven modifikation af förfarandet vid harmonisk analys af periodiska kurvor, af ERNST LINDELÖF. Lineära partiella differentialekvationer med multipla karakteristiker, af H. BLOCK. Om en klass hela funktioner af irregulär tillväxt, af RUBEN MATTSON. Om några af Riemann icke betraktade minimaltstycken, hvilkas begränsning bildas af tre räta linier, af E. R. NEOVIVUS. Om konvergensen af de Poincaré'ska Θ -serierna i hufvud-cirkelfallet, af SEVERIN JOHANSSON.

NIELSEN, NIELS, *Elementaer Talteori. Efter forelæsninger holdte ved Københavns Universitet.* 144 pp. 8.

Harrison & Sons.

London 1911.

SOMMERVILLE, DUNCAN M. Y., *Bibliography of non-euclidean geometry, including the theory of parallels, the foundations of geometry and space of n dimensions.* — XII + 403 pp. 8. 10 sh.

Introduction, containing explanations for the use of the work, and a list of the bibliographical sources. Chronological catalogue. Principal headings of the classification. Subject index. Alphabetical index of subjects. Author index. Additions and corrections.

A. Hermann & Fils.

Paris 1910—1912.

ANDOYER, H., *Nouvelles tables trigonométriques fondamentales, contenant les logarithmes des lignes trigonométriques de centième en centième du quadrant avec dix-sept décimales, de neuf en neuf minutes avec quinze décimales, et de dix en dix secondes avec quatorze décimales.* — XXXII + 600 pp. 4. Fr. 30: — (Ouvrage publ. à l'aide d'une subvention accordée par l'Univers. de Paris.)

Préface. Introduction. Table 1, pour le calcul des logarithmes des nombres avec dix-huit décimales. Table II, form. pour le calc. d. logarithmes d. lignes trigonom. Tables III, cont. les logarithmes d. lignes trig. et leurs variations des divers ordres avec dix-sept déc. de centième en cent. du quadrant. Tables IV, cont. les logarithmes d. lignes trig. av quinze déc. de neuf en neuf min., et les variations pour dix sec. du logarithme-cosinus de dix-huit en dix-huit min. jusqu'à 45° . Tables V, cont. les logarithmes des lignes trig. et leurs différences av. quatorze déc. pour tous les angles du quadrant de dix en dix sec. Tables V bis, cont. les fonctions S et T et leurs différ. av. quatorze déc. pour les trois premiers degrés de dix en dix sec.

BOREL, ÉMILE, *Éléments de la théorie des probabilités.* (Cours de la Fac. des Sciences de Paris.) 2:e éd. — VIII + 191 pp. 8. Fr. 6: —.

Probabilités discontinues: Le jeu de pile ou face. Quelques définitions et quelques théorèmes. Formules d'approximation. Étude approfondie du jeu de pile ou face. Loi des grands nombres et loi des écarts. — Probabilités continues: Définition de la probabilité géométrique. Quelques problèmes de probab. géom. Introduction des fonctions arbitraires. Erreurs d'observation. Loi de Gauss. — Probabilités des causes: Cas des prob. discount. Problèmes statistiques. Cas des prob. contin. Détermination des causes.

DARBOUX, GASTON. Éloges académiques et discours. Vol. publ. par le Comité du Jubilé scientif. de M. Gaston Darboux. — 524 pp. 8. Fr. 5: —.

Préf. de M. Paul Appell. Éloge hist. de J. L. F. Bertrand. Éloge hist. de F. Perrier. Notice hist. sur Charles Hermite. Notice hist. sur Antoine d'Abbadie. Notice hist. sur le général Meusnier, membre de l'Ancienne Acad. des Sciences. Éloge des donateurs de l'Académie. L'Acad. des Sciences et l'Association internat. des Académies. L'Acad. des Sciences et la Carte du Ciel. L'Unité de la Science. Fulton et l'Acad. des Sciences. L'esprit de Géométrie et l'esprit de finesse. L'École de Sèvres. Marcelin Berthelot. Louis Pasteur. Sur le rôle des Sociétés Savantes. La réforme de la licence ès sciences. Jubilé de M. Gaston Darboux. Liste des souscripteurs.

S. Hirzel.

Leipzig 1911—1912.

MANGOLDT, HANS VON, Einführung in die höhere Mathematik, für Studierende und zum Selbststudium. Bd. 1. Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie. — XIV + 477 pp. 8. M. 12:— geb.; M. 13:— geb. Bd. 2. Differentialrechnung. — XI + 566 pp. 8. M. 14:40 geb.; M. 15:40 geb.

Bd. 1. Kombinatorik: Permutationen. Kombinationen. — Summationsformeln. Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Determinanten. Irrationale Zahlen. Wurzeln, Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten, Logarithmen, Winkelmessung. — Grundbegriffe d. analyt. Geometrie: Koordinatensysteme. Erklärungen und Sätze, die für Ebene und Raum gemeinsam gelten. Grundaufgaben d. analyt. Geometrie der Ebene. Grundaufgaben d. analyt. Geometrie des Raumes. — Veränderliche und Funktionen: Feststellung d. allgem. Begriffe. Algebraische Funkt. Transzendente Funkt. Geometrische Darstellung d. Verlaufes einer Funktion. — Gerade und Ebene. Grenzwerte und Stetigkeit.

Bd. 2. Differentialrechn. für Funktionen einer Veränderlichen: Begriff u. Bedeutung eines Differentialquotienten. Grundregeln d. Differentialrechn. Die Sätze von Taylor u. Maclaurin. Maxima u. Minima v. Funktionen einer Veränderlichen. Unbestimmte Formen. Unendlich kleine Zahlen u. Differentiale. Unendliche Reihen. Ausdehnung d. Differentialrechn. auf Funktionen v. mehreren Veränderlichen. Anwendungen d. Differentialrechn. auf Geometrie: Die Begriffe Linie u. Fläche. Linien u. Flächen zweiten Grades. Tangenten u. Normalen. Krümmung ebener Liniensegmente. Einhüllende ebener Linienscharen. — Einführung in die Lehre v. den imaginären Zahlen: Grundbegriffe. Element. Grundoperationen u. Wurzelanziehung. Funktionen v. komplexen Veränderlichen. Der Fundamentalsatz d. Algebra. Differentialrechnung für kompl. Veränderliche. Winkeltreue Abbildung.

G. Janny.

Lille 1910.

CLAIRIN, J., Cours de mathématiques générales. T. 1: Algèbre, géométrie analytique, calcul différentiel. T. 2: Calcul intégral et applications géométriques. — 510 + 154 pp. 4. Fr. 20:—.

T. 1. Algèbre: Combinaisons. Formule du binôme. Suites et limites: Définitions. Propriétés des suites infinies. Théorie des nombres irrationnels. Calcul des radicaux. Séries. — Géom. analyt.: Notions préliminaires. Géom. plane: 1) Généralités, 2) Changement de coordonnées, 3) Théorie de la ligne droite, 4) Théorie du plan. — Algèbre: Théorie des fonctions. Étude de la fonction exponentielle e^x . Fonction logarithmique. Théorie des dérivées. Formules de Taylor et de Mac-Laurin. Étude de la variation des fonctions. Asymptotes de la courbe $y=f(x)$. Étude des formes indéterminées. Théorie des infiniment petits. Différentielles. Fonctions de plusieurs variables: 1) Définitions, 2) Fonct. implicites, 3) Fonct. homogènes, 4) Dérivées et différentielles d'ordre supérieur. Théorie des nombres imaginaires. Théorie des équations algébriques. Équations à coefficients réels. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Théorie des courbes planes. Courbes définies par une équation de la forme $F(x, y) = 0$. Courbes définies paramétriquement. Construction des courbes planes. Lieux géométriques. Théorie des enveloppes. — Coordonnées polaires. Construction des courbes. Courbes du second degré. — Théorie des courbes gauches et des surfaces: Étude des courbes gauches. Étude des surfaces. Génération des surfaces. Surfaces enveloppes.

T. 2. Intégrales définies et indéfinies. Séries entières. Equations différentielles. Différentielles totales, intégrales curvilignes. Intégrales doubles. Intégrales triples. Courbure des courbes planes et gauches.

FOURNEL, P., & L'HUILLIER, E., Notions de physique industrielle, à l'usage des écoles pratiques d'industrie et des écoles professionnelles. — VIII + 102 pp. 8. Fr. 3:75.

Prem. année: Forces. Pesanteur. Hydrostatique. Pneumatique. Optique. — Deuxième année: Chaleur.

LEPOIVRE, G., POIRSON, A., Cours de géométrie théorique et pratique, à l'usage des élèves des écoles d'industrie, des écoles professionnelles et des écoles primaires supérieures. (Honoré d'une souscription par le ministre du commerce.) 2:e éd., rev. et augm. — VI + 153 pp. 8. Fr. 4:50.

Lignes proportionnelles. Transformation des figures. Relations métriques. Notions de trigonométrie. Étude des polygones réguliers. Mesure des aires. Développement et surface des solides géométriques. Mesure des volumes. Notions sur le cubage des bois et le jaugeage des tonneaux.

Lehmann & Stages Forlag.

Köbenhavn 1912.

JUEL, C., Elementær Stereometri. 3:e omarb. Udgave. — 91 pp. 8.

Skærende og parallelle Linier og Planer. Afstande og Vinkler. Projektion af Liniestykker og af Arealer. Opgaver. — Kongruens og Symmetri. Lighedsmethod. Opg. — Cylinderflader og Kegleflader. Kuglefladen. Opg. — Konvekse Hjørner. Det treretvinklede Hjørne. Opg. — Sferisk Geometri. Sferisk Trigonometri. Opg. — Om Polyedre i Almindelighed. Prismer og Pyramider. Regulære Polyedre. Opg. — Overflader. — Rumfang. — Keglesnitslinier. Opgaver.

Macmillan & Co.

London 1912.

HALL, H. S., A school algebra. With answers. Parts 2 & 3. — X + 249 + XXI pp. 8. 2 sh. 6 d.

Arithmetic, harmonic, and geometric progression. The theory of indices. Surds and irrational quantities. Logarithms. Misc. examples. Ratio and proportion. Variation. The theory of quadratic equations and functions. A chapter for revision. Misc. theorems and examples. The progressions and some allied series. Harder graphs. Misc. ex. — Permutations and combinations. Math. induction. The binomial theorem. Partial fractions. Misc. ex. The use of exponential and logarithmic series. Compound interest and annuities. Scales of notation. Easy inequalities. Misc. equations. Misc. ex. Answers.

Stab. Tipogr. Succ. FF. Nistri.

Pisa 1911.

DINI, ULISSE, Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo. Lezioni date nella R. Università di Pisa (in vari anni scolastici. — 5 + 477 + III pp. 8. L. 12:—.

Sviluppi per serie di funzioni H che soddisfano all'equazione del 2° ordine

$$d\left(k \frac{dH}{dx}\right) + [I(x)v(z) + I_1(x)]H = 0.$$

— Convergenza in egual grado delle serie generali che servono per le espressioni analitiche di una funzione di una variabile reale. Alcune considerazioni gen. sulle $\varphi(x, h)$ e sugli sviluppi cui esse danno luogo. Sulla integrazione termine a termine delle serie alle quali conduce la considerazione delle $\varphi(x, h)$. Nove formule per la rappresentazione analitica delle funzioni date arbitrariamente. Applicazione dei risultati ottenuti nei capitoli precedenti. Formule notevoli alle quali conducono i risultati precedenti. Nuove funzioni $\varphi(t, x, h_n)$ e nuovi sviluppi che si deducono dalle formuli del capitolo preced. Estensione di alcuni dei risultati dei capitoli preced. relativi alla integrazione

per serie nel caso in cui le funzioni $f(x)$ e $\psi(x)$ divergono insieme infinite. Sulla derivazione delle serie che servono a rappresentare analiticamente una funzione in un dato intervallo. Altre considerazioni sulla derivazione delle serie che servono alla rappresentazione delle funzioni date arbitrariamente. Sul modo di tendere a zero termini delle serie alte alla rappresentazione delle funzioni date arbitrariamente. Prodotto delle serie alte alla rappresentazione analitica delle funzioni arbitrarie. L'integrale di Fourier ed altri analoghi. — Appendice.

The Open Court Publ. Comp.

Chicago 1911—1912.

BONOLA, ROBERTO, Non-euclidean geometry. A critical and historical study of its development. Author. english translation with additional appendices by H. S. Carslaw. With an introduction by Federigo Enriques. — XII + 268 pp. 8. \$ 2:—.

The attempts to prove Euclid's parallel postulate: The Greek geometers and the parallel postulate. The Arabs and the parallel postulate. The parallel postulate during the renaissance and the 17th century. — The forerunners of non-euclidean geometry: Gerolamo Saccheri. J. H. Lambert. The French geometers towards the end of the 18th century. A. M. Legendre. Wolfgang Bolyai. F. L. Wachter. B. F. Thibaut. — The founders of non-euclidean geometry: K. F. Gauss. F. K. Schweikart. F. A. Taurinus. N. I. Lobatschewsky. Johann Bolyai. The absolute trigonometry. Hypotheses equivalent to Euclid's postulate. The spread of non-euclidean geom. — The later development of non-euclidean geom.: Introduct. Geometry upon a surface. Principles of plane geom. on the ideas of Riemann. Principles of Riemann's solid geom. The work of Helmholtz and the investigations of Lie. Subord. of metrical geom. to project. geom. Representation of the geom. of Lobatschewsky-Bolyai on the euclidean plane. Represent. of Riemann's elliptic geom. in euclid. space. Foundation of geom. upon descript. properties. The impossibility of proving Euclid's postulate. — The fundamental principles of statics and Euclid's postulate. — Clifford's parallels and surface. Sketch of Clifford-Klein's problem. — The non-euclidean parallel construction and other allied constructions. — The independence of project. geom. from Euclid's postulate. — The impossib. of proving Euclid's postulate. An element. demonstration of this impossib. founded upon the properties of the syst. of circles orthogonal to a fixed circle.

CARUS, PAUL, The foundations of mathematics. A contribution to the philosophy of geometry. — 141 pp. 8. 75 c.

The search for the foundations of geometry, historical sketch: Axioms and the axiom of parallels. Metageometry. Precursors. Gauss. Riemann. Lobatchevsky. Bolyai. Later geometricians. Grassmann. Euclid still unimpaired. — The philos. basis of mathematics: The philos. problem. Transcendentalism and empiricism. The a priori and the purely formal. Anyness and its universality. Apriority of different degrees. Space as a spread of motion. Uniqueness of pure space. Mathem. space and physio-

log. space. Homogeneity of space due to abstraction. Even boundaries as standards of measurement. The straight line indispensable. The superreal. Discrete units and the continuum. — Mathematics and metageometry: Diff. geom. systems. Tridimensionality. Three a concept of boundary. Space of four dimensions. The apparent arbitrariness of the a priori. Definiteness of construction. One space, but various systems of space measurement. Fictitious spaces and the apriority of all space measurement. Infinitude. Geometry remains a priori. Sense-experience and space. The teaching of mathematics. Epilogue.

MACH, ERNST, History and root of the principle of the conservation of energy. Transl. from the german and annot. by Philip E. B. Jourdain. — 116 pp. 8. \$ 1:25.

Translator's preface. Author's preface to the sec. ed. The history and the root of the principle of the conservation of energy: Introduction. On the hist. of the theorem of the conservation of work. Mechanical physics. The logical root of the theorem of excluded perpetual motion. — Author's notes. Author's notes to the sec. ed. Translator's notes.

Stab. Tipogr. V. Porta.

Piacenza 1911.

SUINI, ALESSANDRO, La confutazione della geometria non-euclidea e la teoria naturale delle parallele. Studio di filosofia matematica — 27 pp. 8. L. 1:—.

B. G. Teubner.

Leipzig 1912.

AUERBACH, FELIX, Physik in graphischen Darstellungen. 1373 Fig. auf 213 Tafeln, mit erläuterndem Text. — 213 + 28 pp. 4. M. 10:— geb.

Allgem. Physik u. Mechanik. Wellenlehre u. Akustik. Kalorik. Elektrik u. Magnetik. Optik.

Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1911. Erstattet von dem geschäftsführenden Sekretär Dr. W. LIETZMANN. (Schriften d. Deutschen Ausschusses für den math. und naturwiss. Unterricht, Heft 13.) — 33 pp. 8.

Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. VII. — 39 pp. 8. M. 1:60.

W. Lietzmann: Der Kongress in Mailand vom 18. bis 20. September 1911. R. Schimmack: Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts.

HAUCK, GUIDO, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik, hrsg. von Alfred Hauck. In zwei Bänden. Bd. 1. — XII + 339 pp. 8. M. 10: — geh.; M. 12: — geb.

Die Grund- und Aufrissmethode u. ihre Anwend. auf ebenflächige Gebilde: Darstellung von Punkten, Geraden u. Ebenen durch Projektion. Darstellung v. Geraden u. Ebenen durch Spuren. Stereometrische Konstruktionen. Transformationen. Diskussion v. Polyedern. Ebene Schmitte u. Durchdringungen v. Polyedern. — Die axonometrische Methode: Orthogonale Projektion. Schiefe Projektion. — Geometrische Verwandtschaften. — Kurven: Ebene Kurven. Kurven zweiter Ordnung. Raumkurven. Die Schraubenlinie. — Entwickelbare Flächen: Krumme Flächen im allgemeinen. Entwickelb. Flächen. — Rückungsflächen: Nichtentwickelbare Flächen im allgem. Rotationsflächen. Die Flächen zweiter Ordnung als Rückungsflächen. Topographische Flächen. — Windschiefe Regelflächen: Windschiefe Regelflächen im allgem. Die windschiefen Regelflächen zweiter Ordnung. Windschiefe Regelflächen höh. Ordnung. Windschiefe Schraubenflächen.

HEIBERG, J. L., Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 370) — 102 pp. 8. M. 1:25.

Die ionische Naturphilosophie. Die Pythagoreer. Die Entwicklung der Heilkunde im V. Jahrhundert. Hippokrates. Die Entwickl. d. Mathematik im V. Jahrhundert. Platon. Die Akademie. Aristoteles. Der Peripatos. Die alexandrinische Periode. Die Epigonenzeit. Die Römer. Die griechische Fachliteratur der Kaiserzeit. Byzanz.

HILBERT, DAVID, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien. Hrsg. von O. Blumenthal. 3.) — XXVI + 282 pp. 8.

Sachlich geordnete Inhaltsangabe. Allgemeine Theorie der lin. Integralgleichungen: Lösung des algebraischen Problems. Lösung des transzendenten Problems. Das transz. Problem, welches der orthogonalen Transformation der quadrat. Form in eine Quadratsumme entspricht. Entwicklung einer willkür. Funktion nach Eigenfunktionen. Das Variationsproblem, das der algebraischen Frage nach den Minima und Maxima einer quadrat. Form entspricht. Ergänzung u. Erweiter. der Theorie. — Anwendung der Theorie auf lin. Differentialgleichungen: Gewöhl. Differentialgleichungen zweiter Ordn. Sich selbst adjungierte part. Differentialgleichungen zweiter Ordn. von elliptischem Typus. Existenz der Greenschen Funktion. Auftreten eines Parameters in der Randbedingung bei part. Differentialgleichungen. — Anwendung der Theorie auf Probleme der Funktionentheorie: Riemanns Problem in der Theorie der Funktionen einer kompl. Veränderlichen. — Theorie der Funktionen von unendl. vielen Variabeln: Theorie der orthogon. Transformation einer quadrat. Form mit unendl. vielen Variabeln. Simultanes System quadrat. Formen, die Hermiteische Form, die schiefesymmetr. Form u. die Bilinearform mit unendl. vielen Variabeln. — Neue Begründung u. Erweiter. der Theorie der Integralgleichungen: Die Integralgl. mit unsymmetrischem Kern. Die Theorie der orthog. Integralgleichung. Die Theorie der polaren Integralgl. Anwend. der Theorie der polaren Integralgleichungen auf Differentialgleichungen u. auf Systeme von simult.

Differentialgleichungen. — Anwend. der Theorie auf verschiedene Probleme der Analysis, Geometrie u. Gastheorie: Die Randwertaufgabe für ein System simultaner part. Differentialgleichungen erster Ordn. von ellipt. Typus. Eine neue Methode der Zurückführung von Differentialgl. auf Integralgleichungen. Begriff der Parametrix, Minkowskis Theorie von Volumen u. Oberfläche. Anwend. auf ein Problem der Theorie der automorphen Funktionen. Eine zweiparametr. Randwertaufgabe (Kleins Oszillationstheorem). Begründ. der kinetischen Gastheorie.

HOFFMANN, BERNHARD, Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland, veranl. durch die internat. math. Unterrichtskommission, hrsg. von F. Klein, Band 3: 4.) — IV + 68 pp. 8. M. 2: — geh.

Der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie. Vorbegriffe der Himmelskunde. Die Hilfsmittel des Unterrichts. Der Unterricht in der Himmelskunde. Niedere Geodäsie. Verzeichnis der erwähnt. Bücher, Abhandl. und Tafeln.

KRÜGER, L., Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. (Veröffentlichung d. Kgl. Preussischen Geodätischen Institutes, Neue Folge N:o 52.) — IX + 172 pp. 4. M. 9: — geh.

Grundformeln für die konforme Abbildung d. Erdellipsoids in der Ebene. — Konforme Übertragung d. Kugelfläche in die Ebene. — Konf. Übertrag. d. Erdellipsoids in die Ebene: Entwicklung von $f(x)$. Ableit. der geograph. Koordinaten, sow. der Konvergenz des Meridians u. des Vergrößerungsverhältnisses aus den eb. rechtwinkl. Koordinaten. Andere Formeln f. die geograph. Koordinaten, die Meridiankonvergenz u. das Vergrößerungsverhältniss. Ableit. der eb. rechtwinkl. Koordinaten, der Konvergenz d. Meridians u. d. Vergrößerungsverhältnisses aus d. geograph. Koordinaten. Zusammenstellung der Formeln. Zahlenbeispiele. Formeln f. kurze Entfern. vom Hauptmeridian. Zahlenbeisp. — Ableit. d. geograph. Koordinaten. aus d. eb. rechtwinkl. Koordinaten. Ableit. der eb. rechtwinkl. Koordinaten aus den geograph. Koordinaten. Berechn. der Konvergenz des Meridians. Ableit. d. Vergrößerungsverhältnisses. Uniform. der Ausdrücke f. die Breitendifferenz $B - B'$ u. f. die Koordinatendiff. $x - X$. Zusammenstell. d. Formeln. Zahlenbeisp. Formeln f. kleinere Entfernungen. Formeln f. Entfernungen bis zu 100 km. vom Hauptmeridian. Andere Reihenentwickl. f. die Übertragungsformeln. Ableit. einiger Werte für m_0 . — Der Unterschied d. geodät. Linie auf d. Erdellipsoid u. der die Projektionen ihrer Endpunkte in d. Ebene verbindenden Geraden: Allgem. Formeln. Entfernungs- u. Richtungsreduktion bei der Mercator-Projektion d. Kugel. Entfernungsredukt. beim Erdellipsoid. Herleit. v. $\log s - \log r$. Richtungsreduktionen beim Erdellipsoid. Zahlenbeisp. u. Genauigkeitsuntersuch. Numer. Prüfung d. Genauigkeit d. Korrektionsformeln f. d. Richtungen u. f. d. Entfernung. — Beziehungen zw. d. geodät. Linie u. d. eb. rechtwinkl. Koordinaten ihrer Endpunkte: Die Gauss'sche u. d. geodät. Konvergenz des Meridians. Ableit. d. lin. Länge der geodät. Linie u. ihrer Richtungswinkel aus den eb. rechtwinkl. Koordinaten. Formeln m. einem mittleren Richtungswinkel. Zahlenbeisp. Ableit. d. Differenzen der eb. Koord. aus d. lin. Länge u. der Richtung d. geodät. Linie. Zahlenbeisp. — Die Bildkurve d. geodät. Linie: Der

Lauf d. Bildkurve. Die Gleichung d. Bildkurve. Ableit. d. Formeln f. die Richtungsreduktionen. Die Schnittpunkte d. Bildkurve m. der Verbindungslinie ihrer Endpunkte. Forts.; die Bildkurve wird v. der Abszissenachse geschnitten. Zusammenstellung. — Transformation d. Koordinaten: Aufstell. d. Grundgleichung. Erste Entwickl. d. Transformationsgleichungen. Zweite Entwickl. d. Transformationsgleichung. Schärfere Form d. Koeffizienten in d. Transformationsgl. Verschied. Formen d. Transformationsgl. Verschied. Berechnungen einer Koordinatentransformation. Zahlenbeisp.

LEWENT, LEO, Konforme Abbildung, hrsg. von E. Jahnke. Mit einem Beitrag von W. Blaschke. (Math.-physikalische Schriften f. Ingenieure u. Studierende. Hrsg. von E. Jahnke. 14.) — VI + 118 pp. 8. M. 2: 80 geh.; 3: 20 geb.

Die kompl. Zahlenebene. Die Abbild. zweier Bereiche aufeinander. — Die Cauchy-Riemannschen part. Differentialgleichungen u. die konf. Abbild.: Die Bedingungen d. Konformität. Erläuterungen u. Ergänzungen. — Spez. Abbildungsaufgaben: Einiges ü. die Form u. die Eigenschaften d. abbildenden Funktionen. Die lin. Transformation. Der Übergang zur Kugel durch stereograph. Projektion. Anwend. der Transformation mittels reziproker Radien. Das Verhalten analyt. Funktionen in d. Umgebung der unendl. fernen Stelle. Abbild. durch einfache ration., algebr. u. transzendente Funktionen. Spez. Fälle. Eine and. Methode, erläutert an der Abbild. $w = z^2$. Abbild. v. Gebieten, deren Begrenz. v. Ellipsen od. Hyperbeln gebildet wird. Abbild. durch einige einfach period. Funktionen. — Sätze u. Methoden f. die Behandl. v. Abbildungsaufg. allgemeiner Art; Riemanns allgem. Abbildungssatz. Verhalten d. abbildenden Funktion in regul. u. in singul. Punkten. Das Poissonsche Integral. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip. — Konf. Abbildung einer Kreisfläche auf das Innere eines konv. Polygons (von W. Blaschke): Abbild. auf d. Dreiecksfläche. Element. Beweis f. die Abbild. der Dreiecksfläche. Abbild. auf Vielecke. Konf. Abbild. der Fläche des Rechtecks. Polygone, die man durch eindeut. analyt. Funktionen konform auf die Kreisfläche abbilden kann. Ausblick auf weitergehende Untersuchungen.

LIETZMANN, W., Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1911. (Schriften des deutschen Ausschusses für d. math. und naturwiss. Unterricht, H. 13.) — 33 pp. 8. M. 1: 20 geh.

MARKOFF, A. A., Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach d. 2:ten Aufl. des russischen Werkes übers. v. Heinrich Liebmann. — VII + 318 pp. 8. M. 12: — geh.; M. 13: — geb.

Grundlegende Begriffe u. Sätze. Von der Wiederholung der Proben. Über die Summe unabhängiger Grössen. Beispiele für d. verschied. Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grenzfälle, irrationale Zahlen u. stetige Grössen in d. Wahrscheinlichkeitsrechn. Die Wahrscheinlichkeit v. Hypothesen u. zukünftigen Ereignissen. Methode der kleinsten Quadrate. Von der Lebensversicherung. Anhang 1—3.

MEISSNER, OTTO, Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Mathematische Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting, 4.) — IV + 64 pp. 8. M. 0: 80.

Einleitung. Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Ausgleichungsrechnung, Kollektivmasslehre, Statistik. Antworten zu den Fragen im Texte.

TIMERDING, H. E., Die Erziehung der Anschauung. Mit 164 Textfig. — VII + 241 pp. 8. M. 4:80 geh.; 5:60 geb.

Die geschichtliche Entwicklung der Anschauungslehre. Die Forderungen der Gegenwart. Die geom. Formen. Das Wesen der geom. Betrachtung. Die Raumbilder. Die Zahlbilder. Die Stufen der Anschauung. Mathematischer Anhang: Über Korbbögen. Die Krümmung der Kurven. Die Konstruktion der Ellipse. Über Epizykloiden. Über Wellenlinien. Die Ausmessung des Kreises. Die Grundgesetze der Perspektive. Anm.

WEBER, HEINRICH, Festschrift, zu seinem siebenzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern. Mit dem Bildniss v. H. Weber. — VIII + 500 pp. 8. M. 24:— geh.

BAUSCHINGER, J.: Über die Laplacesche Methode d. Bahubestimmung im Vergleich zur Gauss'schen. BLUMENTHAL, O.: Bemerk. üb. die Singularitäten analyt. Funktionen mehrerer Veränderl. DEDEKIND, R.: Üb. den Zellerschen Beweis d. quadr. Reziprozitätssatzes. EICHENWALD, A.: Üb. das Feld der Lichtwellen bei Refl. u. Brechung. EPSTEIN, P.: Die Verallgemeinerungen der Kroneckerschen Grenzformel. GANS, R.: Ist die Gravitation elektromagnetischen Ursprungs? HAHN, H.: Allgem. Beweis des Osgoodschen Satzes d. Variationsrechn. für einfache Integrale. HENNEBERG, L.: Üb. das Gleichgewicht an Seilnetzen u. üb. spezielle räuml. reziproke Gebilde d. graphischen Statik. HILBERT, D.: Üb. den Begriff der Klasse v. Differentialgleichungen. HUNTINGTON, E. V.: A new approach to the theory of relativity. KNESER, A.: Bemerk. üb. die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven u. üb. verw. Fragen in einer nicht-eukl. Geometrie. KRAZER, A.: Zur Theorie d. mehrfachen Gauss'schen Summen. LOEWY, A.: Üb. homomorphe Gruppen u. die Einwirk. von Adjunktionen auf d. Rationalitätsgruppe linearer homog. Differentialgleichungen. MANDELSTAM, L.: Üb. eine Anwendung der Integralgleichungen in d. Theorie der opt. Abbildungen. MAURER, L.: Üb. Transformationsrelationen. MISES, R. v.: Beitrag zum Oszillationsproblem. REYE, TH.: Üb. die Strahlenkongruenz von Hirst. SCHUR, F.: Üb. die Erzeugung der Flächen 2. Grades durch korrelative Bündel. SIMON, M.: Cusanus als Mathematiker. SOMMERFELD, A.: Üb. die Fortpflanzung d. Lichtes in dispergierenden Medien. SPEISER, A.: Üb. die Komposition d. binären quadr. Formen. STÄCKEL, P.: Peroid. Funktionen u. Systeme v. unendlich vielen lin. Gleichungen. STUDY, E.: Gruppen zweiseitiger Kollineationen. TIMERDING, H. E.: Üb. die molekulartheoretische Begründung d. Elektrizitätstheorie. VOIGT, W.: Das elektrostatische Feld in einer stationären Lichtstrahlung. VOLKMANN, P.: Hist.-kritische Studien zum Kausalitätsbegriff. WEBER, R. H.: Üb. den Eindeutigkeitsbeweis in der Theorie d. Wärmeleitung. WELLSTEIN, J.: Algebr. Uniformisierung algebr. Funktionen. WIRTZ, C.: Zur Figur des Mondes.

WIELEITNER, H., Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. (Mathematische Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 7.) — 70 pp. 8. M. 0:80 kart.

Addition von natürl. Zahlen. Der Begriff der Differenz. Addition und Subtrakt. von Differenzen, negat. Zahlen und der Null. Multiplikat. mit posit. und negat. Zahlen und der Null. Die Division absoluter ganzer Zahlen. Gleichheit von Brüchen und Verhältnissen. Division v. relat. Zahlen. Das Rechnen mit Brüchen. Potenzen m. ganzzahligen Exponenten. Das Rechnen m. Wurzelgrößen. Die Logarithmengesetze. Das Rechnen m. kompl. Zahlen. Weiterführ. Literatur.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1912.

FORSYTH, A. R., Lehrbuch der Differential-Gleichungen. Mit den Auflösungen der Aufgaben von Hermann Maser. 2:e autor. Aufl. Nach der dritten des englischen Originals besorgt und mit einem Anhang von Zusätzen versehen von Walther Jacobsthal. — XXII + 920 pp. 8. M. 20: — geh.; M. 21: 50 geb.

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einleitung. Differentialgleichungen erster Ordnung. Die allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Verschiedenartige Integrationsmethoden. Integration durch Reihen. Hypergeometrische Reihen. Lösung durch bestimmte Integrale. Gewöhl. Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderl. Totale Differentialgleichungen. Simultane Differentialgleichungen. — Partielle Differentialgleichungen: Part. Differentialgleichungen erster Ordnung. Part. Differentialgleichungen zweiter u. höherer Ordnung. — Sammlung von Beispielen aus allen Gebieten: Zusätze (von W. Jacobsthal). Auflösungen zu den Beispielen und Aufgaben (von H. Maser).

SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 6:te Aufl. Mit einem Anhang chemischer und physikalischer Konstanten, revidiert von Dr. Karl Scheel. — VI + 182 pp. 8. M. 2: — geb.; 2: 40 geb.

Die Briggschen Logarithmen der natürl. Zahlen von 1 bis 10909. Tafel zur Verwandel. der Briggschen Logarithm. in natürliche. Briggsche und natürl. Logarithm. oft vorkommender Zahlen. Dimensionen des Erdsphäroids in geogr. Meilen, von denen 15 auf einen Grad d. Äquators gehen, usw. Sinuslog. für die ersten 10 Sek. Länge der Kreisbögen für die einz. Grade, Minuten und Sek. für den Halbmesser Eins. Die natürl. goniometr. Funktionen der Winkel von 10 zu 10 Min. Reduktion der Tangenten auf Tangenten der halben Winkel. Die Logarithmen der goniometr. Funkt. der Winkel von Min. zu Min. Reziproke Werte, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln und natürl. Logarithm. der Zahlen von 1 bis 100. Ellipsenquadranten. Sterblichkeitstafel. Physik. und chem. Konstanten.

John Wiley & Sons.

New York 1911.

HUDSON, CLARENCE W., Deflections and statically indeterminate stresses. — XIII + 258 pp. 4. \$ 3: 50 (15/-).

Elementary indeterminate forms. Deflections and reactions of straight structures with solid webs. Deflections and stresses for curved structures with solid webs. Arches with solid webbed ribs. Deflections of structures with either solid or open webs. Deflect. and stresses in structures with open webs. Movable bridges. The arch with an open framework web. Distortions of structures as affecting their erection. Adjusting devices and the necessary adjustments required to make the final connections for important structures. Miscellaneous structures and problems.

LANZA, GAETANO, Dynamics of machinery. — V + 246 pp. 8. \$ 2.50 (10/6), cloth.

Dynamometers. — Moments and products of inertia. — Action of the reciprocating parts of a steam or of a gas engine. Rotative effect. Throw in a direction at right angles to the line of dead points. Flywheels. Rotative effect in gas engines. Side rods. Crank shafts and other moving parts. — Governors. — Bodies having a high rotative speed. Appendix to chapter II, IV, V.

C. J. E. Volckmann Nachf.

Berlin 1912.

WEGNER VON DALLWITZ, Wärmetheorie und ihre Beziehungen zur Technik und Physik. (Wärmelehre in Theorie und Anwendung. Bd. I.) — XVIII + 331 pp. 8. M. 10: — geh.; M. 11: 25 geb.

Einleitung. Was ist Wärme? Masse, Arbeit, potentielle und kinetische Energie, Bewegungsmoment und Leistung. Wärmelehre: Das Messen der Temperatur. Die Zustandsgleichung. Molekulargewichte. Wärmemenge. Wärmeübergang. Der erste Hauptsatz. Die mechanische Bedeutung des Entropiebegriffs. Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre. Erdenergien isobarer und irdischer Herkunft. Wärmegewinnung durch chemische Prozesse. Wärmeinhaltsdiagramm. Muster einer Entropietafel.

Librairie Vuibert.

Paris 1911.

REBIÈRE, A., Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités recueillies. 4:e éd. — 566 pp. 8.

Morceaux choisis et pensées. Variétés et anecdotes: Moeurs, opinions, distractions des savants. Professeurs et étudiants. Enfants et ignorants. Philosophie. Méthodes. Histoire. Langue et littérature. Résultats. Fantaisies. — Paradoxes et singularités: Philosophie. Histoire. Méthodes. Objections. Desiderata. Langue, littérature et beaux-arts. Curiosités et étrangetés. Fantaisies. Problèmes curieux et humoristiques. Note bibliographique.

Xenien-Verlag.

Leipzig 1911.

STERZINGER, OTHMAR, Zur Logik und Naturphilosophie der Wahrscheinlichkeitslehre. Ein umfassender Lösungsversuch. — VIII + 243 pp. 8. M. 4:50.

Klarlegung des Problems. Stumpf, v. Kries, Goldschmidt. Kritik der Laplaceschen Prinzipien. Allgemeine Bemerkungen über Wahrscheinlichkeit, Trugschlüsse. Zur Naturphilosophie der Zufallsspiele und verwandter Geschehnisse.

Nicola Zanichelli.

Bologna 1909—1911.

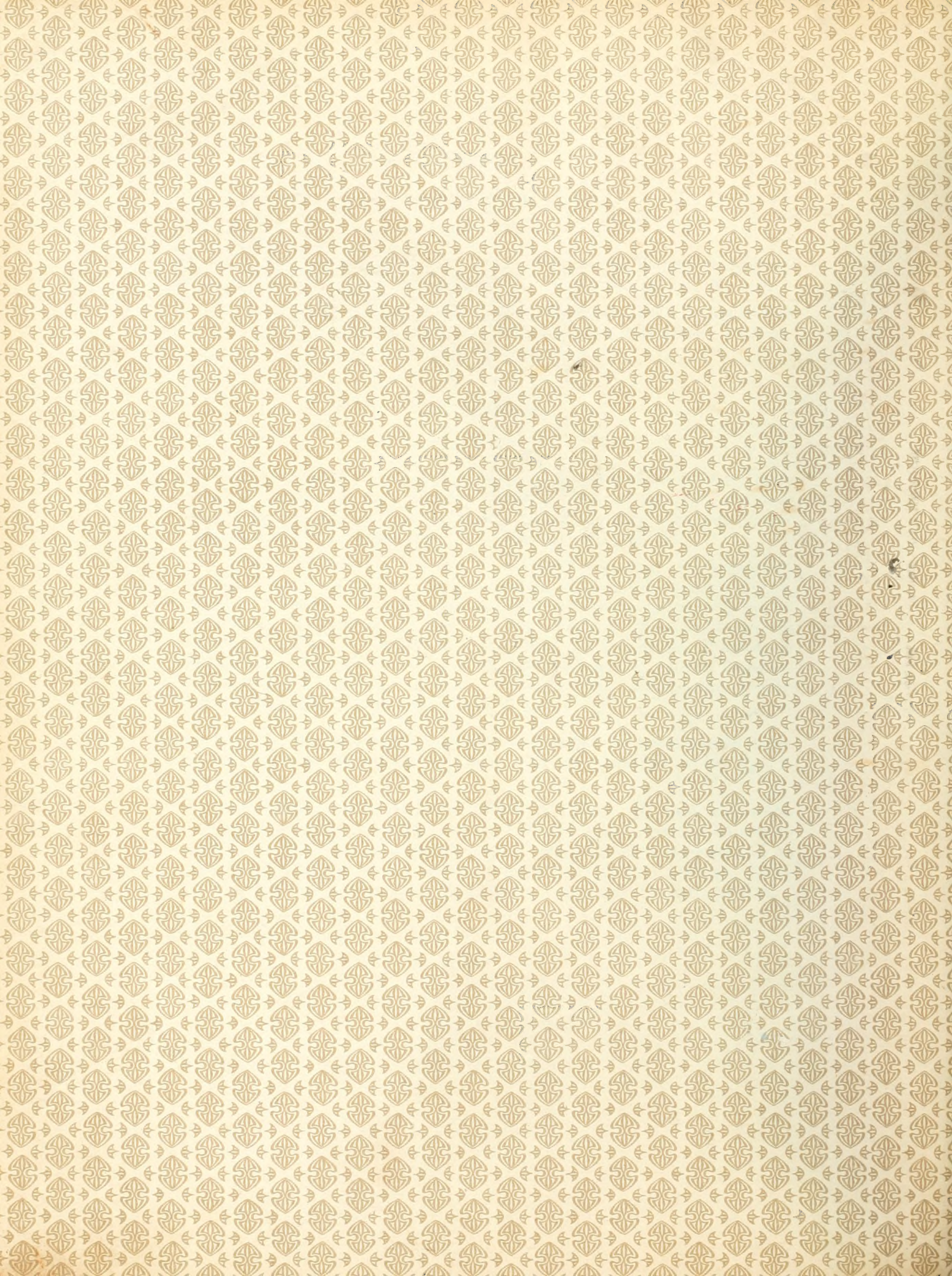
CAJORI, FLORIANO, Storia della fisica elementare con l'evoluzione dei laboratori fisici. Trad. in italiano dal Dott. Dionisio Gambioli. Con tre appendici sull'accademia del Cimento, sui fisici matematici e sui fisici italiani dei tempi recenti. Riveduta dal Prof. Angelo Battelli. — 480 pp. 8. Lire 12:—.

I Greci: La meccanica. La luce. L'elettricità e magnetismo. La meteorologia. Il suono. La teoria atomica. Cause dell'insuccesso di errore delle ricerche fisiche de' Greci. — I Romani. Gli Arabi. L'Europa durante il medio-evo: La polvere da cannone e la bussola. L'idrostatica. La luce. — Il Rinascimento: Il sistema copernicano. La meccanica. La luce. L'elettricità ed il magnetismo. La meteorologia. Il metodo induttivo nella ricerca scientifica. — Il XVII secolo: La meccanica. La luce. Il calorico. L'elettricità ed il magnetismo. Il suono. — Il XVIII secolo. Il XIX secolo. L'evoluzione dei laboratori di fisica. Appendici 1, 2, 3.

ROUSE BALL, W. W., Riecreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni. Versione dall'inglese del Dott. Dionisio Gambioli. — 390 pp. 8. Lire 10:—.

Riecreazioni matematiche: Alcune questioni aritmetiche. Ale. quest. geometriche. Ale. quest. meccaniche. Questioni diverse. I quadrati magici. Problemi dei tracciati continui. — Miscellanea di saggi e problemi: L'esame di laurea in matematica. I tre celebri problemi geometrici dell'antichità. I numeri di Mersenne. Astrologia. Crittografi e cifrari. Iperspazio. Tempo e sua misura. La materia e le teorie sull'etere.





QA
1
A2575
v. 36
Physical &
Applied Sci.
Serials

Acta mathematica

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

